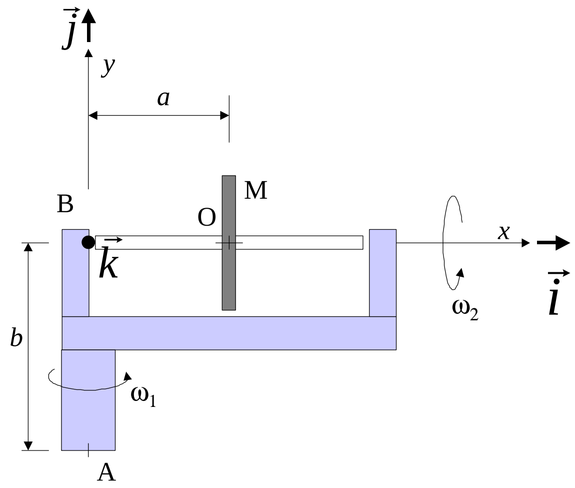
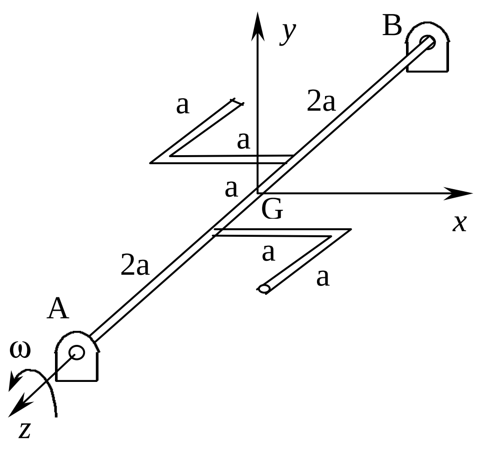
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PME 2200 – MECÂNICA B – 1ª Prova – 29/3/2001 – Duração 100 minutos
(Não é permitido o uso de calculadoras).



1ª Questão (3,0 pontos) – A figura ao lado mostra um sistema mecânico. O disco, de massa M, raio R e centro de massa *O*, está preso a um eixo de massa desprezível, que gira em torno de *Bx* com velocidade angular ω_2. O eixo está montado em mancais, que por sua vez estão fixados em um sistema de suporte, o qual gira em torno do eixo *Ay*, fixo, com velocidade angular ω_1. Conhece-se o momento de inércia J_A do sub-conjunto mancais+suporte em torno do eixo *Ay* e é dado o momento de inércia $I_x = \frac{1}{2}MR^2$, do disco em torno de *Ox*.

a) determinar a energia cinética do sistema;
b) determinar o momento angular do disco em relação ao pólo A.



2ª Questão (3,5 pontos) – O dispositivo da figura é formado por barras de massa ρ por unidade de comprimento e gira com velocidade angular constante ω. Pede-se determinar as reações dinâmicas nos mancais.

3ª QUESTÃO – (BASEADA NO EXERCÍCIO COMPUTACIONAL #01) (3,5 PONTOS)

Você deve ter deduzido que a equação de movimento que rege a dinâmica do sistema, em θ, sob a ação tão somente da gravidade é dada por,

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd\sin\theta}{J_C(\theta)}\left(1+\frac{R\dot{\theta}^2}{g}\right); \quad \text{com}: \quad J_C = \left(\frac{1}{2}MR^2 + (M+m)R^2 + m(d^2 - 2Rd\cos\theta)\right) \tag{1}$$

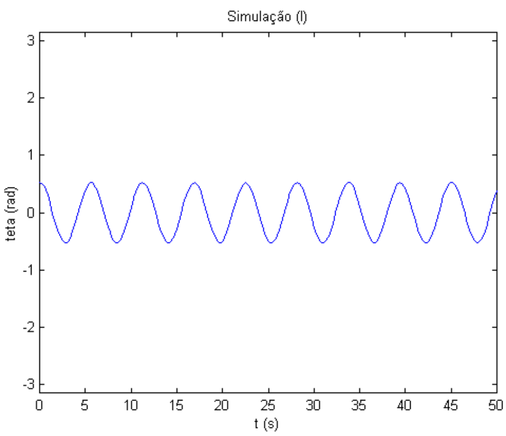
(a) Quais são as possíveis posições de equilíbrio do sistema? São estáveis? Justifique fisicamente.

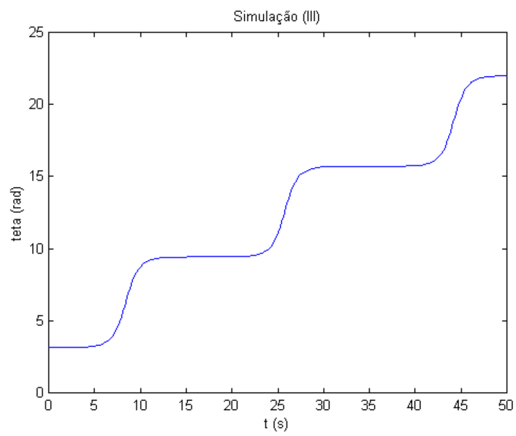
(b) Linearize a equação (1), i.e., tome θ muito pequeno, tal que $\sin\theta \cong \theta$ e $\cos\theta \cong 1$, e desconsidere termos quadráticos (ou bi-lineares) em θ e $\dot{\theta}$. Determine então a frequência natural ω_N do sistema. Interprete-a tendo em vista a analogia com um pêndulo, definindo um comprimento equivalente.

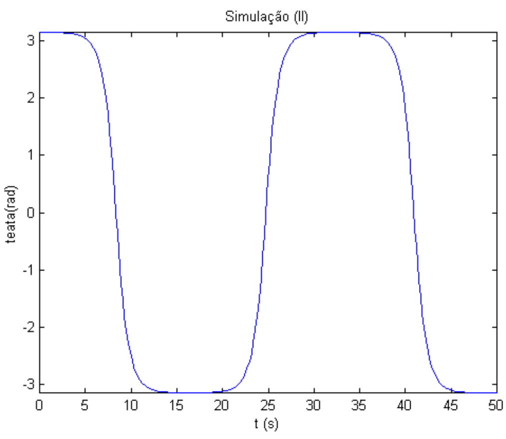
(c) Elabore um diagrama de blocos para simulação da equação (1) em ambiente SCICOS/SCILAB.

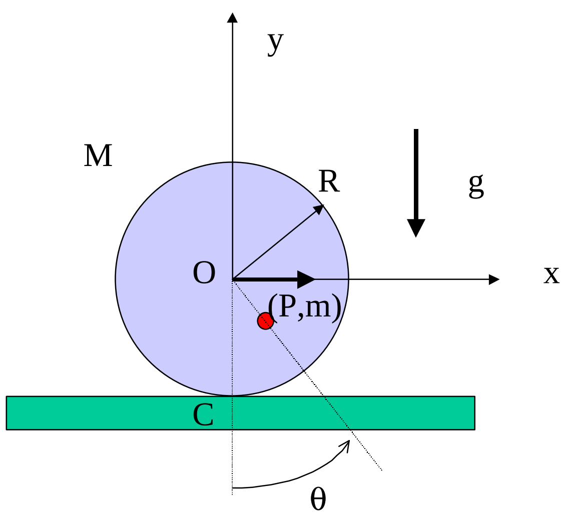
(d) A figura abaixo mostra três resultados de simulação da equação (1), i.e., sob a ação exclusiva da gravidade. Nas duas primeiras simulações o sistema parte do repouso. Na terceira é imposta uma velocidade angular inicial $\omega_0 = 0{,}001\,\text{rad/s}$.
Responda às seguintes perguntas:
1 - Por que $\theta(t)$ nas simulações (I) e (II) apresentam caráter periódico?
2 - Por que o período de oscilação na simulação (I) é menor do que aquele na simulação (II)?
3 - Por que o caráter de (I) é quasi-cossenoidal e o de (II) não?
4 - Por que $\theta(t)$ na simulação (III) é não periódico porém apresenta um caráter crescente e oscilatório?

Parâmetros da simulação: $M = 2\,\text{kg}; \text{m} = 0{,}25\,\text{kg}; \text{R} = 0{,}25\,\text{m}; d = 0{,}10\,\text{m}; \; g = 10\,\text{m/s}^2;$









PME - 2200 - P#01 - 29/03/2001 - RESOLUÇÃO DETALHADA

1a. Questão

a) *Energia Cinética do sistema*:

$$T = \frac{1}{2}M\vec{v}_O^{\,2} + \frac{1}{2}I_{Oxx}\omega_2^{\,2} + \frac{1}{2}I_{Oyy}\omega_1^{\,2} + \frac{1}{2}J_A\omega_1^{\,2}$$

onde,

$$I_{Oxx} = I_x = \frac{1}{2}MR^2\,; \quad I_{Oyy} = \frac{1}{2}I_x = \frac{1}{4}MR^2\,; \quad \vec{v}_O = -\omega_1 a\vec{k}$$

Assim:

$$T = \frac{1}{2}Ma^2\omega_1^{\,2} + \frac{1}{4}MR^2\omega_2^{\,2} + \frac{1}{8}MR^2\omega_1^{\,2} + \frac{1}{2}J_A\omega_1^{\,2} \qquad ,$$

ou seja:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\left(M(a^2 + \frac{1}{4}R^2) + J_A\right)\omega_1^{\,2} + \frac{1}{4}MR^2\omega_2^{\,2}}$$

b) *Momento Angular do Disco em relação ao polo A*:

Fórmula de mudança de polo (lembre que *O* é o centro de massa do disco):

$$\vec{K}_A = \vec{K}_O + (O - A)\wedge M\vec{v}_O$$

Assim:

$$\vec{K}_A = \vec{K}_O + (a\vec{i} + b\vec{j})\wedge\left(-M\omega_1 a\vec{k}\right) = \vec{K}_O + M\omega_1\left(-ab\vec{i} + a^2\vec{j}\right)$$

Como,

$$\vec{K}_O = I_{Oxx}\omega_2\vec{i} + I_{Oyy}\omega_1\vec{j} = \frac{1}{2}MR^2\left(\omega_2\vec{i} + \frac{1}{2}\omega_1\vec{j}\right)$$

teremos

$$\vec{K}_A = \frac{1}{2}MR^2\left(\omega_2\vec{i} + \frac{1}{2}\omega_1\vec{j}\right) + M\omega_1\left(-ab\vec{i} + a^2\vec{j}\right)$$

ou seja

$$\boxed{\vec{K}_A = M\left(\frac{1}{2}R^2\omega_2 - ab\omega_1\right)\vec{i} + M\left(\frac{1}{4}R^2 + a^2\right)\omega_1\vec{j}}$$

2a. Questão

Momento angular em relação a G:

$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & Jz \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \left(-J_{xz}\vec{i} + J_z\vec{k}\right)\omega$$

Como ω é suposto constante:

$$\vec{H}_G = \left(-J_{xz}\dot{\vec{i}} + J_z\dot{\vec{k}}\right)\omega$$

e como: $\dot{\vec{i}} = \omega\vec{k} \wedge \vec{i} = \omega\vec{j}$ e $\dot{\vec{k}} = \omega\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$, então

$$\vec{H}_G = -J_{xz}\omega^2\vec{j} \quad .$$

Momento das forças de reação aplicadas pelos mancais, em relação a G:

$$\vec{M}_G = (X_A - X_B)\frac{5a}{2}\vec{j} + (Y_A - Y_B)\frac{5a}{2}\vec{i}$$

TMA: $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G \therefore \begin{cases} Y_A = Y_B & (1) \\ X_A - X_B = -\dfrac{2J_{xz}\omega^2}{5a} & (2) \end{cases}$

TMB: $m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext}$; $\vec{a}_G = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}^{ext} = \vec{0} \therefore \begin{cases} Y_A + Y_B = 0 & (3) \\ X_A + X_B = 0 & (4) \end{cases}$

De (1) e (2): $\boxed{Y_A = Y_B = 0}$; de (3) e (4): $\boxed{X_A = -\dfrac{J_{xz}\omega^2}{5a} \quad \text{e} \quad X_B = \dfrac{J_{xz}\omega^2}{5a}}$

Como:

$$J_{xz} = \rho a\left[(-a)(-a) + (-\frac{a}{2})(-\frac{a}{2}) + \frac{a}{2}\frac{a}{2} + a \cdot a\right] = \frac{5}{2}\rho a^3$$

Então:

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = -\dfrac{\rho a^2\omega^2}{2} \quad \text{e} \quad X_B = \dfrac{\rho a^2\omega^2}{2} \\ \\ Y_A = Y_B = 0 \end{array}}$$

3a. Questão

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd\sin\theta}{J_C(\theta)}\left(1+\frac{R\dot{\theta}^2}{g}\right); \qquad \text{com:} \quad J_C = \left(\frac{1}{2}MR^2 + (M+m)R^2 + m(d^2 - 2Rd\cos\theta)\right)$$

a) *Equilíbrio* implica em $\dot{\theta} = \ddot{\theta} \equiv 0$. Assim:

$$\boxed{\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta_{eq} = n\pi \quad \text{com} \quad n \in \mathbb{Z}}$$

Os pontos de equilíbrio correspondentes a: (i) n par, são estaveis; (ii) *n* ímpar, *são instáveis*; pois para os primeiros o CG do sistema está abaixo do centro do disco e, para os segundos, acima dele.

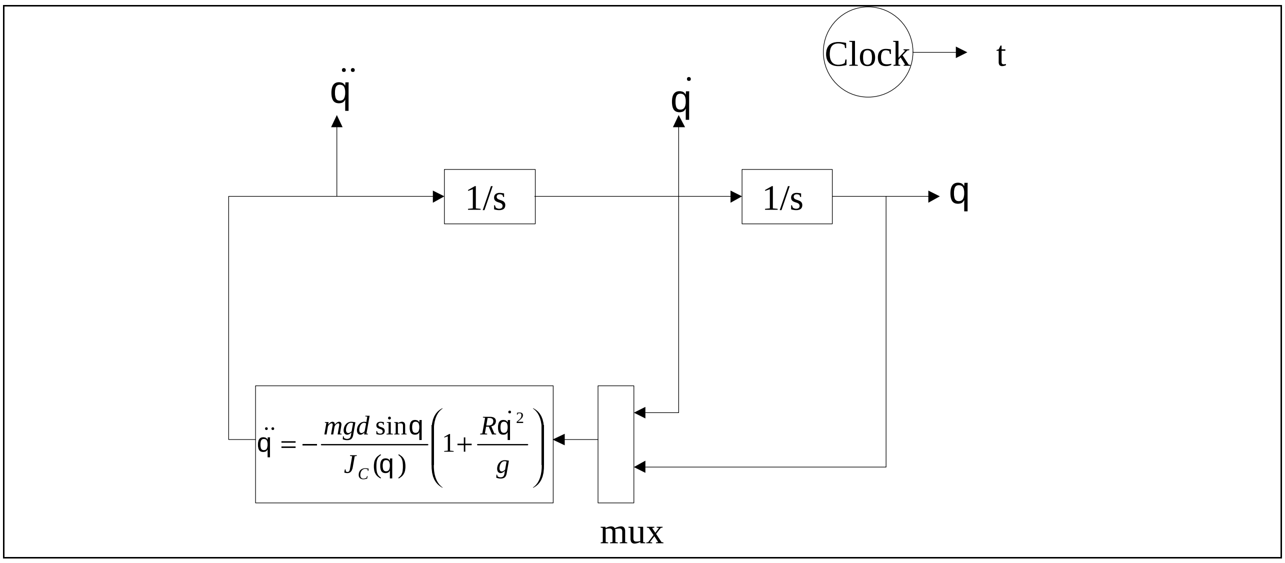
b) *Linearizando* a equação vem:

$$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dfrac{mgd\theta}{\tilde{J}_C} = 0 \ ; \quad \text{para} \quad \dfrac{R\dot{\theta}^2}{g} << 1 \ \text{ e } \theta << 1; \\ \text{com:} \quad \tilde{J}_C = \left(\dfrac{1}{2}MR^2 + (M+m)R^2 + m(d^2 - 2Rd)\right) \end{array}}$$

que é análoga à equação de um pêndulo equivalente, linear, $\ddot{\theta} + \frac{g}{l_{eq}}\theta = 0$. A frequência natural do sistema linearizado é dada portanto por,

$\boxed{\omega_N = \sqrt{\frac{g}{l_{eq}}}}$; com $\boxed{l_{eq} = \frac{\tilde{J}_C}{md}}$ o comprimento de um pêndulo equivalente.

c) *Diagrama para simulação* da equação de movimento (incluindo diversas saídas de: posição velocidade e aceleração):



d)

1 - Por que $\theta(t)$ nas simulações (I) e (II) apresentam caráter periódico?

Resposta: porque em ambas, a velocidade angular inicial é nula. Como o sistema é conservativo (não há dissipação nem ação de forças externas não-conservativas) a energia potencial máxima corresponde àquela da posição inicial, que não pode ser ultrapassada. O disco portanto oscila em torno da posição de equilíbrio estável mais próximo (no caso $\theta_{eq} = 0$).

2 - Por que o período de oscilação na simulação (I) é menor do que aquele na simulação (II)?

Resposta: porque a amplitude de oscilação em (I) é menor do que em (II) (a equação que rege o movimento é análoga a uma equação de pêndulo não-linear). Podemos notar também que o binário desestabilizador em (II) é, inicialmente, muito pequeno, causando uma aceleraçao inicial bastante pequena se comparada à aceleração inicial em (I).

3 - Por que o caráter de (I) é quasi-cossenoidal e o de (II) não?

Resposta: No caso (I) a amplitude é relativamente pequena e o movimento se assemelha ao movimento de um "pêndulo linear equivalente", que é regido pela equaçao linearizada.

4 - Por que $\theta(t)$ na simulação (III) é não periódico porém apresenta um caráter crescente e oscilatório?

Resposta: No caso (III) o disco excêntrico parte da posição em que o pino está na vertical acima do centro *O*, ou seja de uma posição de equilíbrio instável. No entanto, parte com velocidade angular diferente de zero (embora muito pequena). A velocidade angular inicial é positiva fazendo com que o disco se desloque para a esquerda. Como o sistema é conservativo, o disco rola sobre si mesmo indefinidamente (pelo Teorema da Conservaçao de Energia). No entanto, superposto ao movimento de rolamento do disco, coexiste um movimento acelerado (desacelerado) associado à ação positiva (negativa) do binário desestabilizador provocado pela excentricidade do pino de peso *mg*. Este movimento composto tem, portanto, caráter oscilatório.