





c) a localização e os valores de duas massas compensadoras  $m_1 \geq 0$  e  $m_2 \geq 0$  a serem fixadas nas bordas dos discos A e B, respectivamente, para balancear o conjunto. (1.5)

A localização das massas deve obedecer os critérios  $X_G^t = 0$ ,  $Y_G^t = 0$ ,  $J_{xz}^t = 0$  e  $J_{yz}^t = 0$ , onde o superescrito significa total, ou seja, incluindo as massas  $m_1$  e  $m_2$ .

Da definição de baricentro,

$$(m_1 + m_2 + 8m)(G^t - O) = 8mL \left( \frac{-1}{16} \vec{i} + \frac{15}{16} \vec{k} \right) + m_1(-R)\vec{i} + m_2(2R)\vec{i} + m_2(3L)\vec{k}$$

que, na direção  $i$ , implica,

$$R(2m_2 - m_1) = \frac{mL}{2}.$$

Do critério  $J_{xz}^t = 0$  decorre,

$$J_{xz}^t = J_{xz} + m_1(-R)(0) + m_2(2R)(3L)$$

que resulta,

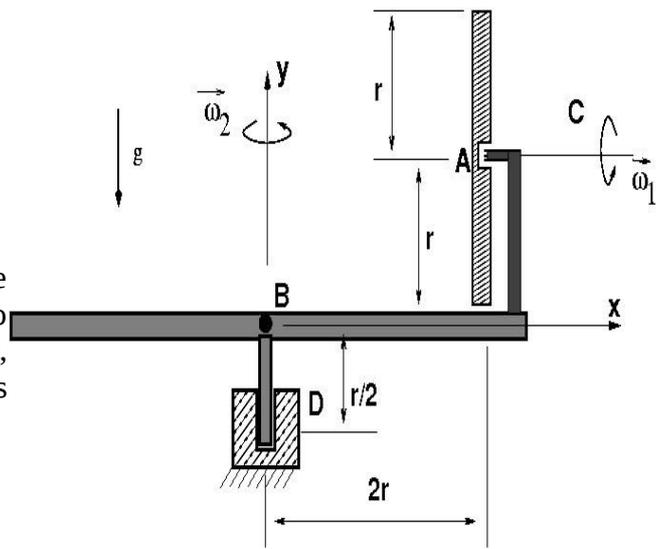
$$m_2 = \frac{mL}{4R}$$

que, ao ser introduzida na equação do baricentro, produz

$$m_1 = 0$$

### 2ª Questão (4 pontos)

Considere um disco de centro A, raio  $r$  e massa  $m$  e um disco com centro B, raio  $2r$  e massa  $M$ . Eles são sustentados pelos mancais C e D, respectivamente, conforme a figura. O mancal C permite apenas





rotação na direção  $Ax$ . O mancal D permite apenas rotação na direção  $By$ . O disco A gira com velocidade angular de módulo constante  $\omega_1$  em relação ao disco de centro B, e o disco B gira com velocidade angular constante  $\omega_2$  em relação a um referencial inercial, suporte do mancal D. Dadas as dimensões da figura pede-se, expressando os valores em relação ao sistema de coordenadas  $Axyz$ , solidário ao disco de centro B :

(a) a aceleração do ponto A, velocidade angular e aceleração angular do disco de centro A; (0.5)

A aceleração do ponto A pode ser obtida por derivação do vetor posição e resulta

$$a_A = -2r\omega_2^2 \vec{i}$$

O vetor de rotação do ponto A pode ser obtido por composição de movimentos,

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_1 \vec{i} + \vec{\omega}_2 \vec{j}$$

e o vetor aceleração angular pode ser obtido por derivação

$$\dot{\vec{\omega}}_A = -\omega_1 \omega_2 \vec{k}$$

(b) o momento da quantidade de movimento do disco A em relação ao seu baricentro; (0.5)

O momento da quantidade de movimento angular do disco A é

$$\vec{H}_A = [\vec{i} \vec{j} \vec{k}] J_A [\omega]$$

que de forma detalhada é

$$\vec{H}_A = [\vec{i} \vec{j} \vec{k}] \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta expressão resulta,

$$\vec{H}_A = \frac{mR^2}{2} \omega_1 \vec{i} + \frac{mR^2}{4} \omega_2 \vec{j}$$

(c) as reações vinculares no mancal C, incluindo binários reativos; (1.0)



Do Teorema do Movimento do Baricentro,

$$m\vec{a}_A = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} - mg\vec{j}$$

e decorre,

$$A_x = -2rm\omega_2^2$$

e

$$A_y = mg$$

Do Teorema do Momento Angular,

$$M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{mR^2}{2}\omega_1\vec{i} + \frac{mR^2}{4}\omega_2\vec{j} \right)$$

resulta  $M_x = 0$ ,  $M_y = 0$  e

$$M_z = -\frac{mR^2}{2}\omega_1\omega_2$$

(d) o momento da quantidade de movimento do disco B em relação ao seu baricentro, desprezando a inércia do mancal C; (0.5)

O momento da quantidade de movimento angular do disco B é

$$\vec{H}_B = [\vec{i}\vec{j}\vec{k}]J_B[\omega]$$

que de forma detalhada é

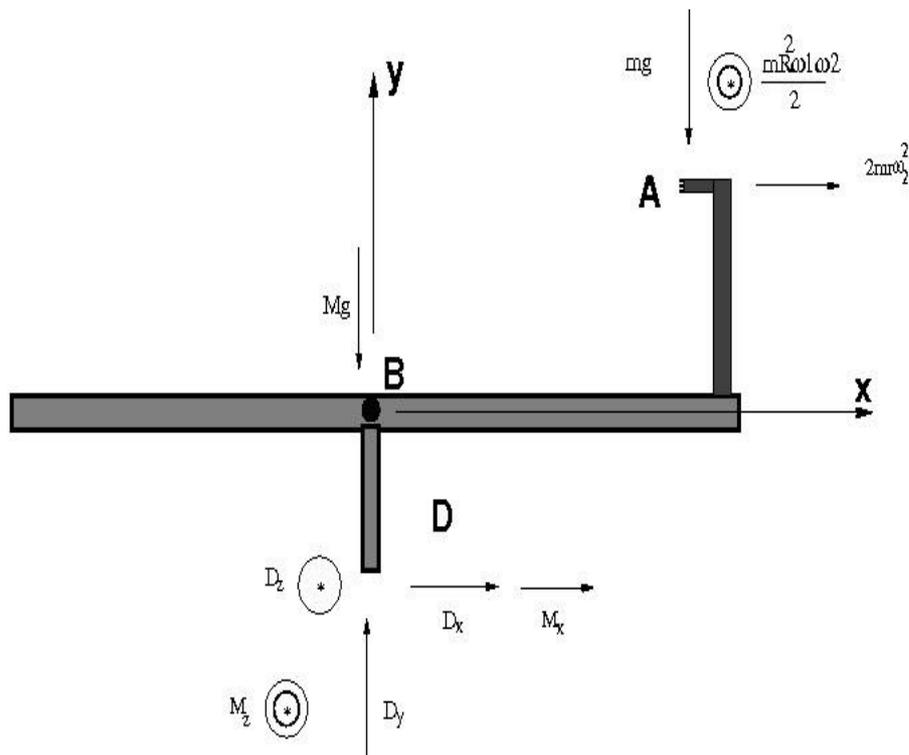
$$\vec{H}_B = [\vec{i}\vec{j}\vec{k}] \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4r^2M}{2}\omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde  $I = m4r^2/4$  e  $J = m4r^2/2$ . Resulta,

$$\vec{H}_B = 2rM\omega_2\vec{j}$$



(e) o diagrama de corpo livre (forças e momentos) do disco com centro B; (0,5)



(f) as reações vinculares no mancal D. (1.0)

A partir do Teorema do Momento Angular podemos determinar os binários vinculares no mancal D,

$$M_x^D \vec{i} + \left( M_z^D - 2rmg + \frac{mr^2}{2} \omega_1 \omega_2 - 2r^2 m \omega_2^2 \right) \vec{k} = \vec{0}$$



na direção  $\vec{i}$ ,

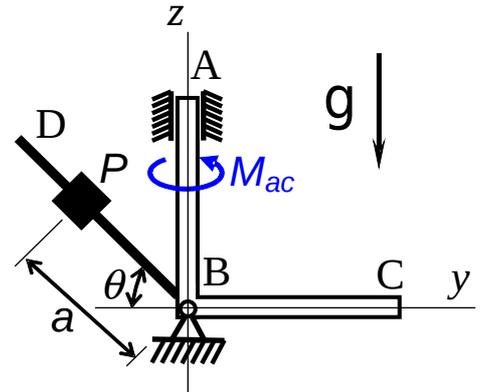
$$M_x^D = 0$$

e na direção  $\vec{k}$

$$M_z^D = 2rmg - \frac{mr^2}{2}\omega_1\omega_2 + 2r^2m\omega_2^2$$

### 3ª Questão (3 pontos) - Baseada no EMSC#1

No sistema mostrado na figura ao lado, a barra  $ABC$  tem diâmetro desprezível e os trechos  $AB$  e  $BC$  têm massa  $m$  e comprimento  $L$ . Ao longo da barra  $BD$ , de massa desprezível, pode-se fixar a posição  $P$  de uma partícula de massa concentrada de valor  $2m$ , definida pelo ângulo  $\theta$  constante e pela distância  $a$  ao ponto  $B$ . O sistema pode girar em torno do eixo  $z$  com vetor de rotação  $\vec{\phi} = \dot{\phi} \vec{k}$  e pode sofrer a ação de um momento externo  $\vec{M}_{ac} = (T_o - C\dot{\phi}) \vec{k}$ . Na solução do EMSC 1, solicitou-se considerar o sistema de coordenadas  $Bxyz$ , solidário à barra  $ABC$ . Considerando a solução dos itens em cada uma das partes do exercício, pede-se:



- Escreva a equação diferencial de movimento para o grau de liberdade,  $\phi$  ou seja,  $\phi = \phi(t)$ . Indique qual foi o teorema usado na obtenção da equação, bem como em qual direção ( $x$ ,  $y$  ou  $z$ ) a equação vetorial foi projetada para originar  $\phi = \phi(t)$ .
- Considerando as simulações com condições iniciais  $\phi(0) = 0$  e  $\dot{\phi}(0) = -8$  rad/s, esboce um gráfico da variação da reação  $Y_A$  (paralela a  $y$  no ponto  $A$ ) ao longo dos 10 segundos de simulação.
- Para as condições do item anterior, descreva como seria a variação temporal das reações vinculares caso estivessem expressas em relação a sistema de coordenadas solidário ao referencial fixo.
- Esboce o gráfico da variação das reações vinculares no ponto  $A$  para as simulações feitas na Parte 4 do exercício, ou seja,  $T_o = 0$ ;  $C = 0$  e  $\dot{\phi}(0)$  variando entre 0.5 e 4 rad/s.

### Resolução da 3ª questão:

- O Teorema do Momento Angular TMA para o problema do EMSC #1 pode ser equacionado na forma



$$\frac{d}{dt}([I_B]\{\vec{\omega}\}) + m(G - B) \wedge \vec{a}_B = \vec{M}_B, \text{ onde}$$

$$a_B = 0 \quad e \quad [I_B]\{\vec{\omega}\} = -J_{xz}\dot{\varphi} i - J_{yz}\dot{\varphi} j + J_z\dot{\varphi} k$$

Fazendo-se a derivada em relação ao tempo e substituindo os termos referentes a  $M_B$ , tem-se:

$$\begin{cases} -J_{xz}\ddot{\varphi} + J_{yz}\dot{\varphi}^2 = -\frac{mgl}{2} + 2mga \cos \theta - Y_A L \\ -J_{yz}\ddot{\varphi} - J_{xz}\dot{\varphi}^2 = X_A L \\ J_z\ddot{\varphi} = M_{AC} = T_o - C\dot{\varphi} \end{cases}$$

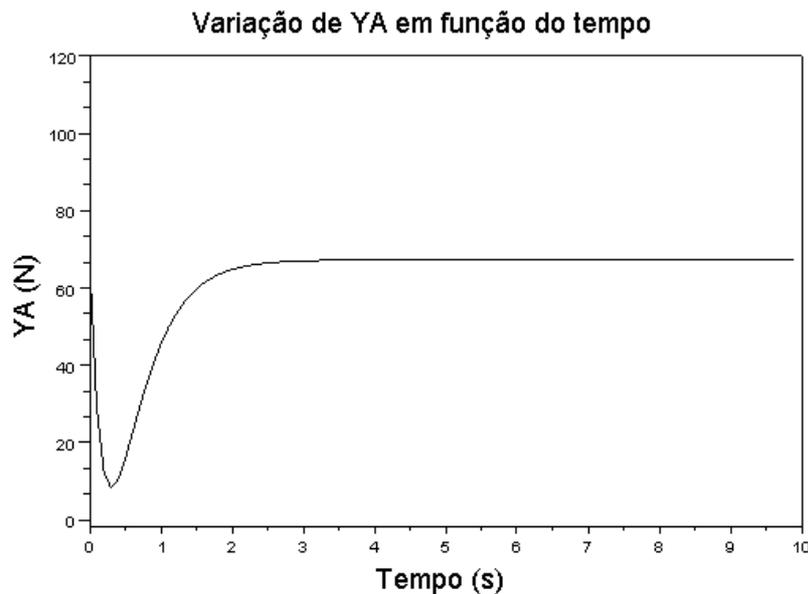
0,5

A equação diferencial de movimento  $\varphi = \varphi(t)$  é  $J_z\ddot{\varphi} = T_o - C\dot{\varphi}$  e foi obtida pela projeção do

TMA na direção z. Pelos cálculos,  $J_z = \frac{mL^2}{3} + 2ma^2 \cos^2 \theta$

0,5

(b) Gráfico da variação de  $Y_A$  em função do tempo:

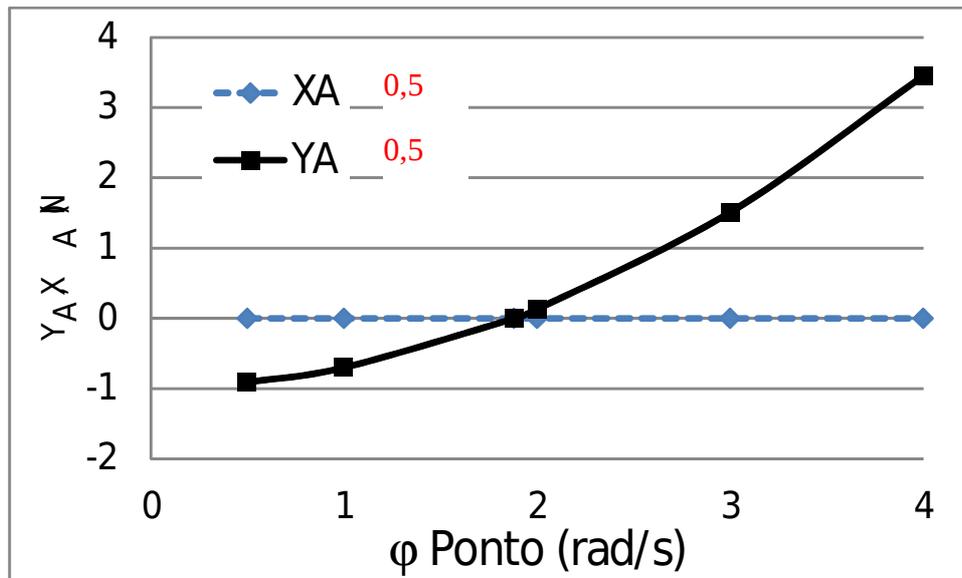


0,5

(c) A variação temporal das reações vinculares, caso estivessem expressas em relação a sistema de coordenadas solidário ao referencial fixo, dada pela projeção das reações expressas no sistema de coordenadas solidário ao corpo sobre o sistema de coordenadas fixo. Em função da rotação do corpo, definida pela variação do ângulo  $\varphi$ , a variação das reações expressas no sistema fixo se daria de forma senoidal.



(d) Gráfico das variações de  $X_A$  e  $Y_A$  quando  $\dot{\varphi}(0)$  é variado entre 0.5 e 4 rad/s:

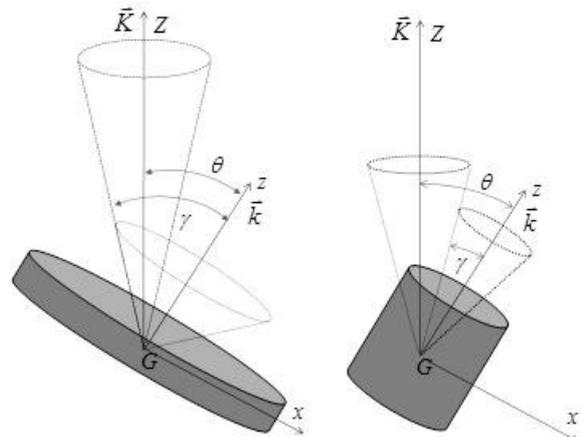


#### 4ª Questão (1.0 ponto)

Considere dois corpos de revolução em movimento livre de forças externas, exceto as de origem gravitacional, conforme esquematizado nas duas figuras abaixo. Nelas são mostrados os cones ‘fixo’ e ‘do corpo’ (ou ‘base’ e ‘rolante’). Os eixos  $(Gz)$  e  $(GZ)$  são orientados pelos versores  $\bar{k}$  e  $\bar{K}$ . Nas duas situações, os ângulos formados entre o eixo de precessão e o de rotação própria são inferiores a  $\pi/2$ . Sejam:  $J_i; i=1,2$  os momentos centrais de inércia em torno dos respectivos eixos de revolução  $(Gz)$  e  $I_i; i=1,2$  os dois outros momentos centrais de inércia, em torno dos respectivos eixos  $(Gx)$  ou  $(Gy)$ . Sejam, também,  $H_{G_i}; i=1,2$  os respectivos vetores de momento angular, medidos em relação aos correspondentes centros de massa. Considere que a precessão seja estacionária, com  $\omega_{p_i}; i=1,2$  e  $\omega_{r_i}; i=1,2$  as respectivas taxas de precessão e de rotação própria, de tal sorte que vale a equação de equilíbrio  $(J_i - I_i)\omega_{p_i} \cos \theta_i + J_i \omega_{r_i} \sin \theta_i = 0; i=1,2$ .

Justificando suas respostas, pede-se, para os dois casos estudados:

- O que se pode afirmar acerca da variação temporal dos vetores de momento angular?
- Indicar, graficamente, os respectivos vetores de rotação e suas decomposições nos eixos  $(Gz)$  e  $(GZ)$ .
- Classificar, a rotação própria como *direta* ou *retrógrada* com respeito à precessão.



(Corpo 1:  $J_1 > I_1$ )

(Corpo 2:  $J_2 < I_2$ )



**Resolução da 4ª questão:**

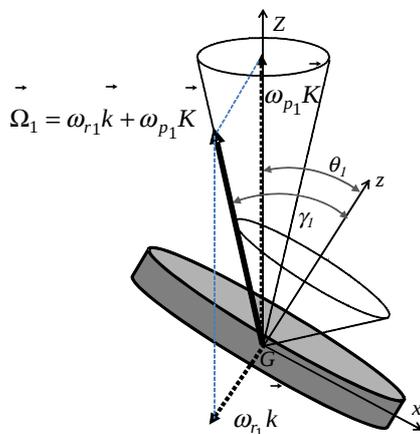
**( 1.0 )**

(a) O que se pode afirmar acerca da variação temporal dos vetores de momento angular?

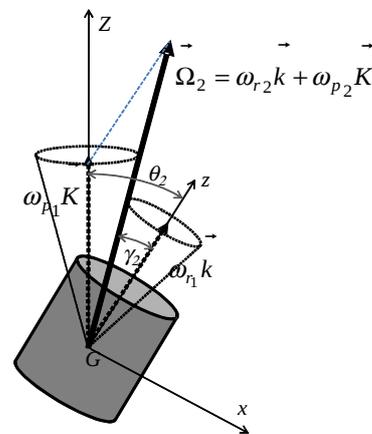
R: Os dois corpos executam movimentos livres de forças, com eventual exceção de forças de natureza gravitacional. Desta forma o momento das forças calculado em relação ao respectivo centro de massa é nulo. Assim, do ‘Teorema do Momento Angular’ pode-se afirmar que os respectivos vetores de ‘Momento Angular’,  $H_{G_i}$ ;  $i=1,2$ , são invariantes. Ou seja o ‘Momento Angular’ é conservado.

(b) Indicar, graficamente, os respectivos vetores de rotação e suas decomposições nos eixos  $(Gz)$  e  $(GZ)$ .

R: Os respectivos vetores de rotação,  $\Omega_i = \omega_{r_i}k + \omega_{p_i}K = -\omega_{p_i} \text{sen } \theta_i i + (\omega_{r_i} + \omega_{p_i} \cos \theta_i)k$ ;  $i=1,2$ , estão indicados abaixo, com suas correspondentes decomposições. Notar que o vetor de rotação tem a direção instantânea coincidente com a da ‘aresta de contato’ entre o ‘cone espacial’ e o ‘cone do corpo’. Ou seja, em precessão estacionária livre, pode-se imaginar o movimento do corpo como aquele decorrente da rotação, sem escorregamento, do cone do corpo sobre a superfície do cone fixo. O ‘cone do corpo’ é o lugar geométrico do vetor de rotação visto do referencial do corpo, enquanto que o ‘cone espacial’ é o lugar geométrico do vetor de rotação visto do referencial “fixo”.



(Corpo 1:  $J_1 > I_1$ )



(Corpo 2:  $J_2 < I_2$ )



(c) Classificar, a rotação própria como *direta* ou *retrógrada* com respeito à precessão.

R: Da equação de equilíbrio,  $(J_i - I_i)\omega_{p_i} \cos \theta_i + J_i \omega_{r_i} \omega_{p_i} \sin \theta_i = 0$ , é imediato verificar, para  $\omega_{p_i} \sin \theta_i \neq 0$ , que  $(J_i - I_i)\omega_{p_i} \cos \theta_i + J_i \omega_{r_i} = 0$ . Ou seja,  $\omega_{r_i} = -\frac{(J_i - I_i)}{J_i} \omega_{p_i} \cos \theta_i$ . Em ambos os casos  $0 < \theta_i < \pi/2$ , de tal forma que  $0 < \cos \theta_i < 1$ . No caso do corpo 1 ('oblato'),  $J_1 > I_1$ . Ou seja, as taxas de precessão e rotação própria têm sinais opostos e a rotação própria é, portanto, dita '*retrógrada*' com respeito à precessão. O contrário ocorre no caso do corpo 2 ('prolato') e a rotação própria é denominada '*direta*'. Os diagramas do item (b) permitem visualizar tais assertivas.