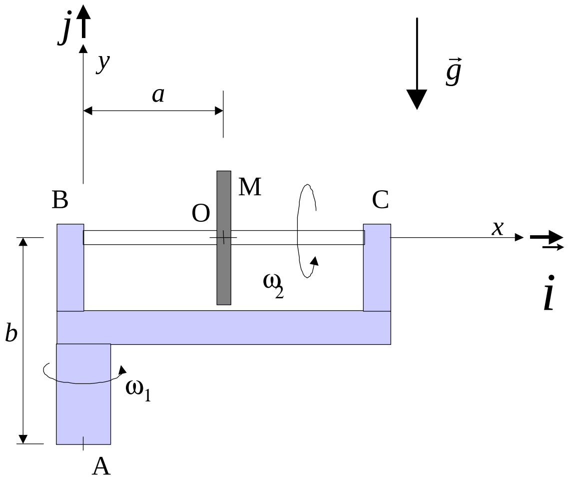
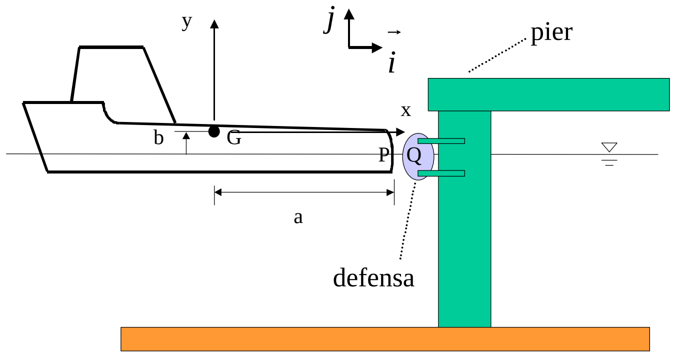
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PME 2200 – MECÂNICA B – 2ª Prova – 10/5/2001 – Duração 100 minutos
(Não é permitido o uso de calculadoras).



1ª Questão (2,0 pontos) – No sistema da figura, o disco de massa M, raio R e centro de massa *O*, está preso a um eixo de <u>massa desprezível</u>, que gira em torno de *Bx* com velocidade angular ω_2. O eixo está montado em mancais, que por sua vez estão fixados em um sistema de suporte, o qual gira em torno do eixo *Ay*, fixo, com velocidade angular ω_1. É dado o momento de inércia $I_x = \frac{1}{2}MR^2$, do disco em torno de *Ox*. Pede-se:

a) Determine qual o mancal que se desgastará mais, admitindo que o desgaste seja proporcional apenas à força normal atuante no mancal; justifique a sua resposta.
b) Determine as reações nos mancais.

2a Questão (4,0 pontos) --

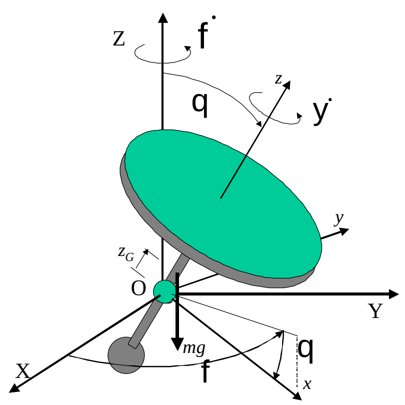


A figura ao lado mostra um rebocador portuário prestes a se chocar contra uma defensa de um pier. A embarcação, de massa total *M*, realiza uma manobra à ré, em movimento de translação pura, com velocidade constante, tal que $\vec{V}_G = u\vec{i}$ é o vetor de velocidade de seu centro de massa, imediatamente anterior ao choque. O ponto de contacto da embarcação com a defensa é *P*, tal que $(P - G) = a\vec{i} - b\vec{j}$. Dado o coeficiente de restituição *e*, e desprezando qualquer forma de atrito, pede-se:

a) elabore o diagrama de corpo-livre;
b) equacione o problema de impacto;
c) determine o impulso $\vec{R}$ aplicado à embarcação;
d) determine e a velocidade $\vec{V}_G{}' = u'\vec{i} + v'\vec{j}$, do centro de massa *G* da embarcação e o vetor de rotação da embarcação $\vec{\omega}'$, logo após o choque.

Dado: *I*, momento de inércia total da embarcação em torno do eixo *Gz*.

3ª Questão – (baseada no exercício computacional #02) (4,0 pontos)



Considere, conforme mostra a figura, um pião simétrico, sujeito apenas à ação da força peso, deprezando qualquer forma de atrito. O eixo fixo *OZ* é vertical e *O* é uma articulação. Nestas condições, uma única equação diferencial ordinária, não-linear, rege o movimento do 'pião',

$$I\ddot{\theta} + \frac{(a - b\cos\theta)(b - a\cos\theta)}{I\,\mathrm{sen}^3\theta} = mgz_G\,\mathrm{sen}\theta \qquad (1)$$

onde $\alpha = K_{OZ} = I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$ e $\beta = K_{Oz} = J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$, componentes do momento angular nas direções dos eixos *OZ* e *Oz*, respectivamente, são dois invariantes do movimento e, portanto, dependem apenas das condições iniciais.

Pede-se:

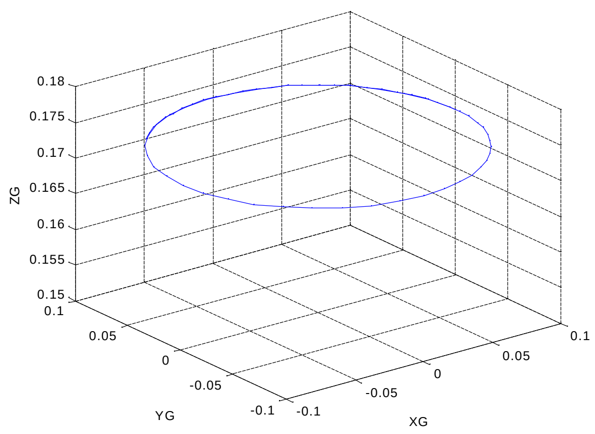
(a) Determine o valor da taxa de precessão estacionária $\dot{\phi} = \Omega$, considerando conhecidos a taxa de rotação própria $\dot{\psi} = \omega$, constante, e o ângulo de equilíbrio $\bar{\theta}$.

(b) Elabore um diagrama de blocos para simulação da equação (1) em ambiente SCICOS/SCILAB, chegando até o nível que permita plotar um gráfico da posição do centro de massa (X_G, Y_G, Z_G).

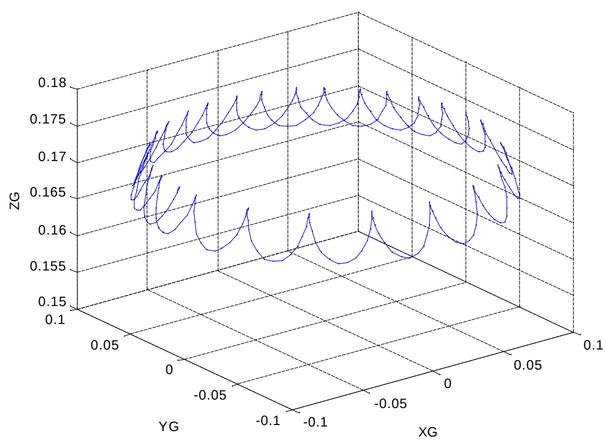
(c) A figura abaixo mostra dois resultados de simulação da equação (1). Responda às seguintes perguntas:
1 - Qual dos dois casos corresponde à precessão estacionária?
2 - Observando os gráficos do caso (b), vê-se que a taxa de precessão atinge um valor máximo quando a taxa de rotação própria atinge valores mínimos e também quando o ângulo de nutação tem valores máximos. Explique porque isto ocorre desta maneira.
3 - Avalie o período da nutação no caso (b).
4 - Se a rotação própria fosse aumentada, o período de nutação diminuiria ou aumentaria? Justifique.

Parâmetros da simulação:

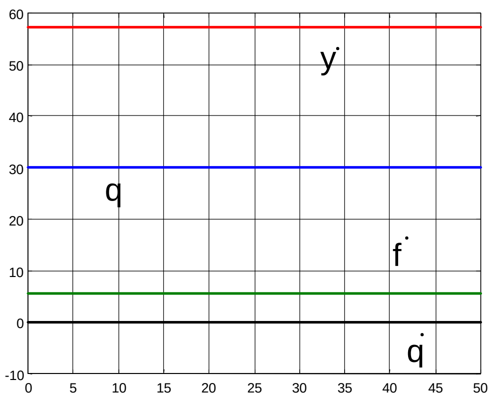
$mgz_G = 0.2$ Nm; $I = 1{,}0$ kg m^2; $J = 2I$; condições iniciais: $\theta(0) = \pi/6$; $\dot{\psi}(0) = 1.0$ rad/s; $\dot{\theta}(0) = 0$



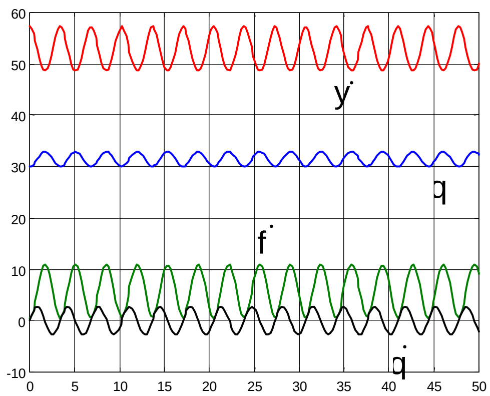
(a)



(b)



(a)



(b)

PME - 2200 - P#02 - 10/05/2001 - RESOLUÇÃO DETALHADA

1a. Questão

a) Temos um caso de precessão estacionária em que os eixos de rotação própria e de precessão formam um ângulo de 90^o. Sabemos que nesse caso o eixo de rotação própria, o momento aplicado ao rotor e o eixo de precessão formam um triedro reto positivo e, portanto, o momento aplicado ao rotor tem a direção e sentido de $-\vec{k}$. Portanto o momento aplicado aos mancais terá a direção e sentido de $\vec{k}$. Como a componente estática da reação nos mancais tem a direção e sentido de $-\vec{j}$, o efeito do binário giroscópico será o de aumentar o módulo da reação em *B* e diminuir o módulo da reação em *C*. Assim, dentro das hipóteses do problema, o desgaste será maior em *B*.

b) Vetor de rotação: $\vec{\omega} = \omega_2 \vec{i} + \omega_1 \vec{j}$

Momento angular: $\vec{H}_O = I_x \omega_2 \vec{i} + I_y \omega_1 \vec{j}$

Derivada do momento angular em relação ao tempo: $\dot{\vec{H}}_O = -I_x \omega_1 \omega_2 \vec{k}$

TMA: $\vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O \Rightarrow -B_y + C_y = -\dfrac{I_x \omega_1 \omega_2}{a}$

TR: $B_y + C_y = P$

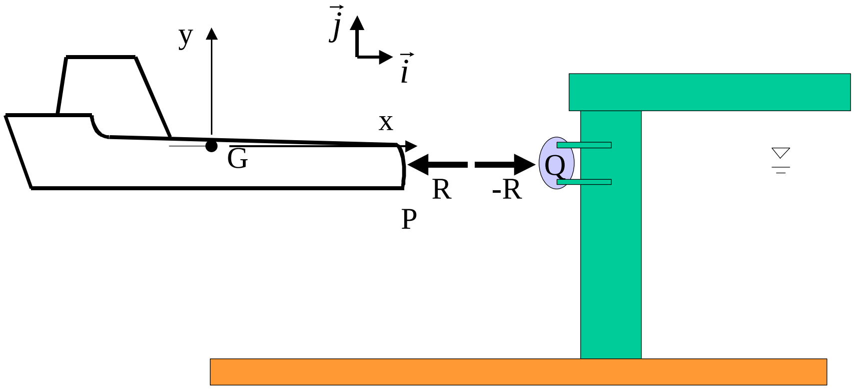
Resp: $\boxed{B_y = \dfrac{P}{2} + \dfrac{MR^2 \omega_1 \omega_2}{4a}}$ e $\boxed{C_y = \dfrac{P}{2} - \dfrac{MR^2 \omega_1 \omega_2}{4a}}$

Obs: Pelo menos um dos mancais deve impedir o movimento do eixo na direção *x* e, portanto, aparecerá, também, uma reação nessa direção. Supondo que o mancal *B* seja responsável por essa restrição, então,

$$\boxed{B_x = M \omega_1^2 a}$$

2a. Questão

a) elabore o diagrama de corpo-livre;



b) equacione o problema de impacto;

Embarcação:

TRI:

$$M(\vec{V}'_G - \vec{V}_G) = -R\,\vec{i} \;\Rightarrow\; \begin{cases} M(u'-u) = -R \\ M(v'-v) = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} u' = u - \dfrac{R}{M} \\ v' = 0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

TMI:

$$I(\vec{\omega}' - \vec{\omega}) = -Rb\vec{k} \;\Rightarrow\; \vec{\omega}' = -\frac{Rb}{I}\vec{k} \Rightarrow \omega' = -\frac{Rb}{I} \qquad (2.2)$$

Restituição de Newton:

$$u'_P = -e\,u_P = -eu \qquad (2.3)$$

Poisson:

$$u'_P = u' + \omega' b \qquad (2.4)$$

c) determine o impulso $\vec{I}$ aplicado à embarcação;

Aplicando (2.2) em (2.4):

$$u'_P = u' - \frac{Rb^2}{I} \qquad (2.5)$$

substituindo o resultado em (2.3)

$$u' - \frac{Rb^2}{I} = -e\,u \qquad (2.6)$$

e usando este último resultado em (2.1)

$$\boxed{\vec{R} = -\frac{MI}{I + Mb^2}(1+e)\,u\,\vec{i}} \qquad (2.7)$$

d) determine e a velocidade $\vec{V}'_G = u'\vec{i} + v'\vec{j}$, do centro de massa G da embarcação e o vetor de rotação da embarcação $\vec{\omega}'$, logo após o choque.

De (2.7) e (2.8)

$$\boxed{u' = -\frac{Mb^2 - eI}{Mb^2 + I}u}$$

Já resolvido, de (2.1): $\boxed{v' = 0}$

De (2.7) em (2.2): $\boxed{\vec{\omega}' = -\frac{Mb}{I + Mb^2}(1+e)\,u\,\vec{k}}$

3a. Questão

(a) Determine o valor da taxa de precessão estacionária $\dot{\phi} = \Omega$, considerando conhecidos a taxa de rotação própria $\dot{\psi} = \omega$, constante, e o ângulo de equilíbrio $\bar{\theta}$.

Precessão estacionária significa: $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = \ddot{\phi} = \ddot{\psi} = 0$; $\dot{\psi} = \omega$; $\dot{\phi} = \Omega$; $\theta = \bar{\theta}$, e portanto de

$\alpha = K_{OZ} = I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$ e $\beta = K_{Oz} = J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$, vem

$\beta = K_{Oz} = J(\omega + \Omega\cos\bar{\theta}) \Rightarrow$

que fornece a taxa de precessão:

$$\boxed{\Omega = \frac{1}{\cos\bar{\theta}}\left(\frac{\beta}{J} - \omega\right)} \qquad (3.1)$$

ou, resolvendo explicita e alternativamente,

$$\boxed{\Omega = \frac{1}{2}\left\{ -\frac{J\omega}{(J-I)\cos\bar{\theta}} \pm \sqrt{\left(\frac{J\omega}{(J-I)\cos\bar{\theta}}\right)^2 + \frac{4mgz_G}{(J-I)\cos\bar{\theta}}} \right\}} \qquad (3.2)$$

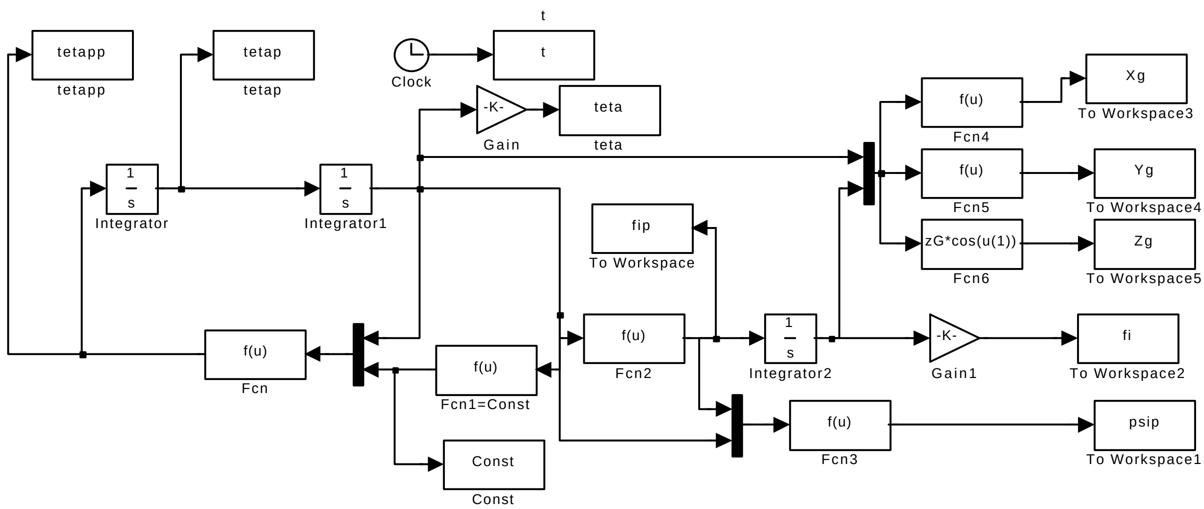
Por outro lado, da eq. (1), segue uma relação entre $\bar{\theta}, \alpha$ e β , na forma

$$\boxed{\frac{(\alpha - \beta\cos\bar{\theta})(\beta - \alpha\cos\bar{\theta})}{I\,\mathrm{sen}^3\bar{\theta}} = mgz_G\,\mathrm{sen}\bar{\theta}} \qquad (3.3)$$

ou, alternativamente, resolvendo explicitamente

$$\boxed{\cos\bar{\theta} = \frac{1}{(1 - \frac{I}{J})\Omega^2}\left(\omega\Omega - \frac{mgz_G}{J}\right)} \qquad (3.4)$$

(b) Elabore um diagrama de blocos para simulação da equação (1) em ambiente SCICOS/SCILAB (ou MATLAB/SIMULINK), chegando até o nível que permita plotar um gráfico da posição do centro de massa (X_G, Y_G, Z_G).



onde:

$$K = 180/\pi$$
$$\alpha = K_{OZ}(0) = \left[I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\right]_{t=0} \qquad (3.5)$$
$$\beta = K_{Oz}(0) = \left[J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\right]_{t=0}$$

$$\text{func} \equiv= (\text{m}*\text{g}*\text{zG}*\sin(\text{u}(1)) - \text{u}(2)/(\text{I}*\sin(\text{u}(1))\wedge 3))/\text{I} = \frac{1}{I}\left[mgz_G \operatorname{sen}\theta - \frac{\text{Const}}{I\operatorname{sen}^3\theta} \right]$$

$$\text{func1} \equiv \text{Const} = (\alpha - \beta\cos\theta_0)(\beta - \alpha\cos\theta_0)$$

$$\text{func2} \equiv (\text{alfa} - \text{beta}*\cos(\text{u}(1)))/(\text{I}*\sin(\text{u}(1))\wedge 2) = (\alpha - \beta\cos\theta)/(\text{I}\sin^2\theta) = \dot{\phi}$$

$$\text{func3} \equiv \text{beta}/\text{J} - \text{u}((1))*\cos(\text{u}(2)) = \hat{a}/J - \text{func2}\cos\theta = \dot{\psi} \qquad (3.6)$$

$$\text{func4} \equiv \text{zG}*\sin(\text{u}(1))*\cos(\text{u}(2)) = z_G \operatorname{sen}\theta\cos\phi = X_G$$

$$\text{func5} \equiv \text{zG}*\sin(\text{u}(1))*\sin(\text{u}(2)) = z_G \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi = Y_G$$

$$\text{func6} \cong \text{zG}*\cos(\text{u}(1)) = z_G\cos\theta = Z_G$$

(c) A figura abaixo mostra dois resultados de simulação da equação (1). Responda/justifique às/as seguintes perguntas/afirmações:

1 - Qual dos dois casos corresponde à precessão estacionária?

Resposta: O caso (a) corresponde à precessão estacionária, pois o ângulo de nutação é constante e o CG descreve uma trajetória circular.

2 - Observando os gráficos do caso (b), vê-se que a taxa de precessão atinge um valor máximo quando a taxa de rotação própria atinge valores mínimos e também quando o ângulo de nutação tem valores máximos. Explique porque isto ocorre desta maneira.

Resposta:

Sabemos que:

$$\beta = K_{Oz} = J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta), \qquad (3.7)$$

e

$$\alpha = K_{OZ} = I\dot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I\dot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta + \beta\cos\theta \qquad (3.8)$$

são dois invariantes do movimento.

De (3.7), se $\dot{\psi}$ diminui, $\dot{\phi}\cos\theta$ deve aumentar para que β permaneça constante. Suponha que $\dot{\phi}$ aumente e $\cos\theta$ diminua, de forma a manter $\dot{\phi}\cos\theta$ aumentando. Vê-se, de (3.8) que é possivel que α permaneça constante, bastando que $I\dot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta$ aumente na mesma taxa em que $\beta\cos\theta$ diminui, balanceando-se mutuamente.

Outra forma de visualizar é escrever (3.8) na forma:

$$\alpha = I\dot{\phi}(1 - \cos^2\theta) + \beta\cos\theta \qquad (3.9),$$

que é uma equação quadrática em $\cos\theta$ e que terá solução

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\beta}{I\dot{\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{I\dot{\phi}}\right)^2 - 4\left(\frac{\alpha}{I\dot{\phi}} - 1\right)} \right] \qquad (3.10)$$

válida desde que

$$\left| \frac{1}{2}\left[\frac{\beta}{I\dot{\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{I\dot{\phi}}\right)^2 - 4\left(\frac{\alpha}{I\dot{\phi}} - 1\right)} \right] \right| \le 1 \qquad (3.11).$$

A solução (3.10) mostra que $\cos\theta$ diminui (i.e., θ aumenta) quando $\dot{\phi}$ aumenta.

Podemos adicionalmente lembrar que, diminuindo $\dot{\psi}$, diminui a rigidez giroscópica e θ tende a aumentar.

3 - Avalie o período da nutação no caso (b)?

Resposta: Do gráfico de $\theta(t)$ em (b), contamos 14 ciclos completos em cerca de 47,5 segundos. Portanto o período de nutação é aproximadamente $T_\Theta \cong \frac{47{,}5}{14}\,\mathrm{s} \cong 3{,}4s$.

4 - Se a rotação própria fosse aumentada o período de nutação diminuiria ou aumentaria? Justifique.

Resposta: O período de nutação diminuiria, pois a "rigidez giroscópica", que é proporcional à rotação própria, aumentaria.