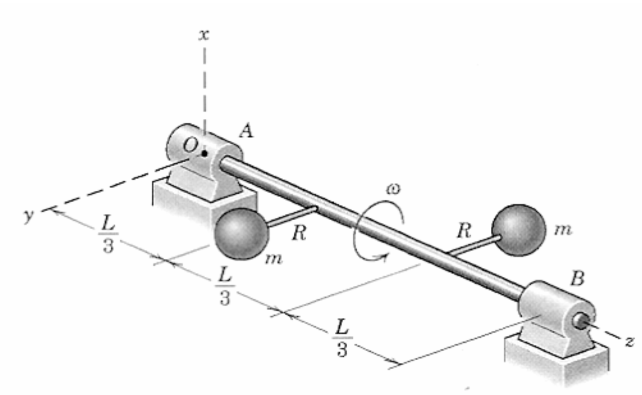
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

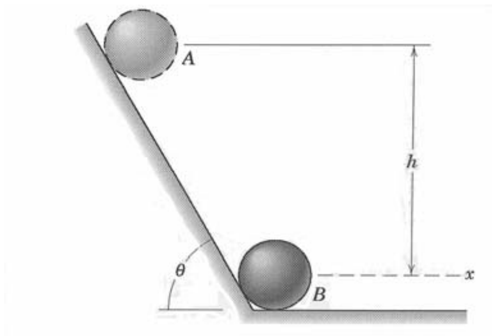
PME 2200 – MECÂNICA B – Prova de Recuperação – 24 de julho de 2007

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

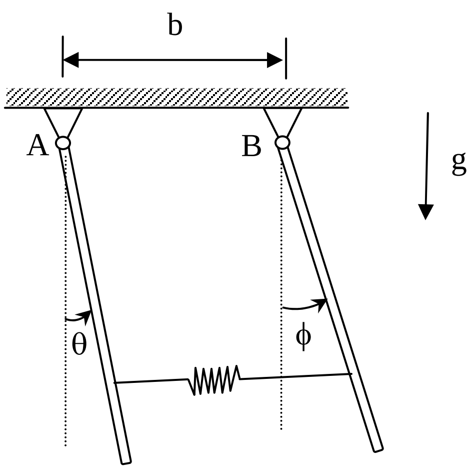
1ª Questão (3,5 pontos)
Duas partículas de massa *m* estão fixas por meio de hastes a um eixo esbelto, conforme a figura. As massas das hastes e do eixo podem ser desprezadas. O sistema *Oxyz* é solidário ao eixo. Determine as componentes nas direções *x* e *y* das reações dinâmicas nos mancais *A* e *B*.



2ª Questão (3,0 pontos)
A pequena esfera lisa é solta a partir do repouso na posição *A* e desliza sem atrito pela guia inclinada, para baixo, até bater na superfície horizontal rígida em *B*. Se o coeficiente de restituição para o impacto é *e*, determine a componente horizontal da velocidade da esfera após o choque e a fração da energia perdida durante o impacto.

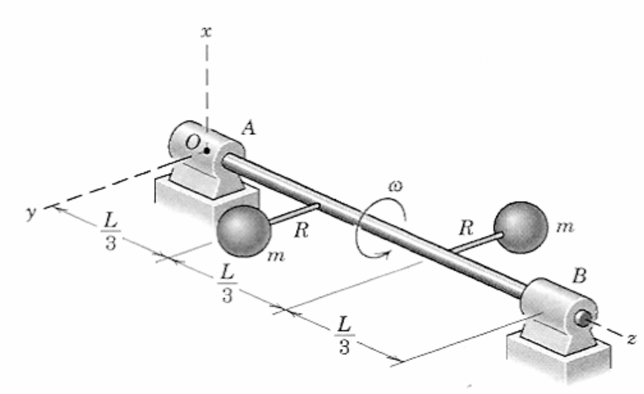


3ª Questão (3,5 pontos)
Duas barras homogêneas, cada uma com massa *m* e comprimento *L*, estão articuladas na extremidade superior e interligadas, a uma distância *h* das extremidades articuladas, por uma mola elástica linear de rigidez *k* e comprimento livre *b*, como mostrado na figura. Aproximando a deformação da mola em uma posição genérica por *h* (senϕ - senθ), sendo ϕ e θ as coordenadas generalizadas independentes do problema, pede-se:
a) Determinar a energia cinética do sistema;
b) Determinar a função energia potencial do sistema;
c) Utilizando a formulação da Mecânica Analítica, estabelecer as equações diferenciais do movimento do sistema.



1ª Questão (3,5 pontos)

Duas partículas de massa *m* estão fixas por meio de hastes a um eixo esbelto, conforme a figura. As massas das hastes e do eixo podem ser desprezadas. O sistema *Oxyz* é solidário ao eixo. Determine as componentes nas direções *x* e *y* das reações dinâmicas nos mancais *A* e *B*.



TMB: $m\vec{a}_G = (X_A + X_B)\vec{i} + (Y_A + Y_B)\vec{j}$

Mas $\vec{a}_G = \vec{0}$

$$\begin{cases} X_A = -X_B \\ Y_A = -Y_B \end{cases} \qquad \textbf{(0,5)}$$

TMA pólo em A:

$$\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A$$

$$\vec{M}_A = X_B L\vec{j} - Y_B L\vec{i} \qquad \textbf{(0,5)}$$

$$\vec{H}_A = \begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{bmatrix}[J]_A \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = -J_{yz}\omega\vec{j} + J_z\omega\vec{k} \qquad \textbf{(0,5)}$$

$$\dot{\vec{H}}_A = -J_{yz}\omega\left(\omega\vec{k} \wedge \vec{j}\right) = J_{yz}\omega^2\vec{i} \qquad \textbf{(0,5)}$$

sendo $J_{yz} = mR\dfrac{L}{3} + m(-R)\dfrac{2L}{3} = -\dfrac{MRL}{3}$ **(0,5)**

Substituindo no TMA:

$$-\frac{MRL}{3}\omega^2\vec{i} = X_B L\vec{j} - Y_B L\vec{i}$$

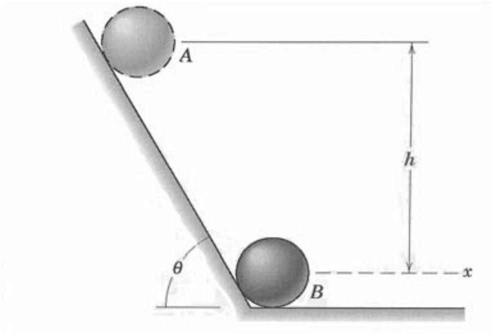
assim:

$$\boxed{X_B = 0} \text{ e } \boxed{Y_B = \frac{MR}{3}\omega^2} \qquad \textbf{(0,5)}$$

Substituindo no TMB:

$$\boxed{X_A = 0} \text{ e } \boxed{Y_A = -\frac{MR}{3}\omega^2} \qquad \textbf{(0,5)}$$

2ª Questão (3,0 pontos)
A pequena esfera lisa é solta a partir do repouso na posição *A* e desliza sem atrito pela guia inclinada, para baixo, até bater na superfície horizontal rígida em *B*. Se o coeficiente de restituição para o impacto é *e*, determine a componente horizontal da velocidade da esfera após o choque e a fração da energia perdida durante o impacto.



Velocidade imediatamente antes do impacto:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$ **(0,5)**

Conservação da quantidade de movimento na horizontal durante o impacto:

$$v'_x = v_x \quad \Rightarrow \boxed{v'_x = \sqrt{2gh}\cos\theta}$$ **(0,5)**

Hipótese de Newton segundo a normal de choque (direção vertical):

$$v'_y = -ev_y \quad \Rightarrow \boxed{v'_y = e\sqrt{2gh}\mathrm{sen}\theta}$$ **(1,0)**

Fração da energia perdida:

$$n = \frac{T' - T_0}{T_0}$$

$$T_0 = mgh$$

$$T' = \frac{1}{2}m\left(v'^2_x + v'^2_y\right) = \frac{1}{2}m2gh\left(\cos^2\theta + e^2\mathrm{sen}^2\theta\right)$$

$$\boxed{n = 1 - \left(\cos^2\theta + e^2\mathrm{sen}^2\theta\right)}$$ **(1,0)**

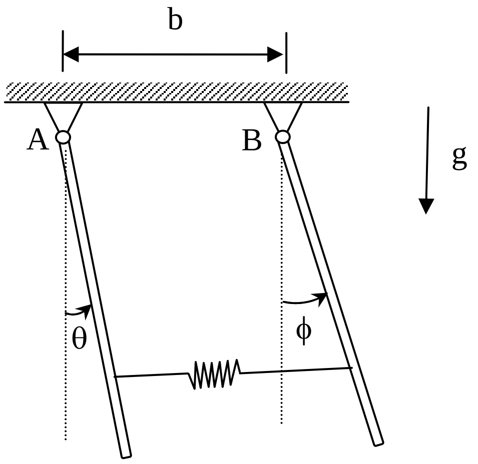
3ª Questão (3,5 pontos)

Duas barras homogêneas, cada uma com massa *m* e comprimento *L*, estão articuladas na extremidade superior e interligadas, a uma distância *h* das extremidades articuladas, por uma mola elástica linear de rigidez *k* e comprimento livre *b*, como mostrado na figura. Aproximando a deformação da mola em uma posição genérica por *h* (senϕ - senθ), sendo ϕ e θ as coordenadas generalizadas independentes do problema, pede-se:

a) Determinar a energia cinética do sistema;

b) Determinar a função energia potencial do sistema;

c) Utilizando a formulação da Mecânica Analítica, estabelecer as equações diferenciais do movimento do sistema.



$$T = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\phi}^2 \qquad \boxed{T = \frac{mL^2}{6}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\right)}$$

(0,5)

$$V = mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta) + mg\frac{L}{2}(1-\cos\phi) + \frac{1}{2}kh^2(\text{sen}\phi - \text{sen}\theta)^2$$

$$\boxed{V = mg\frac{L}{2}(2-\cos\theta-\cos\phi) + \frac{1}{2}kh^2(\text{sen}\phi - \text{sen}\theta)^2}$$

(0,5) + (0,5)

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} \qquad \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \frac{mL^2}{3}\dot{\phi} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) = \frac{mL^2}{3}\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -mg\frac{L}{2}\text{sen}\theta - kh^2\cos\theta(\text{sen}\theta - \text{sen}\phi) \qquad \frac{\partial L}{\partial\phi} = -mg\frac{L}{2}\text{sen}\phi - kh^2\cos\phi(\text{sen}\phi - \text{sen}\theta)$$

$$\boxed{\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + mg\frac{L}{2}\text{sen}\theta + kh^2\cos\theta(\text{sen}\theta - \text{sen}\phi) = 0} \qquad \boxed{\frac{mL^2}{3}\ddot{\phi} + mg\frac{L}{2}\text{sen}\phi + kh^2\cos\phi(\text{sen}\phi - \text{sen}\theta) = 0}$$

(1,0) **(1,0)**