Física III - 4320301

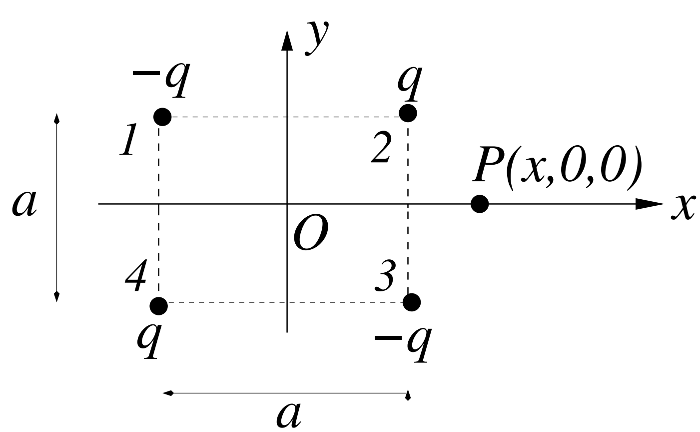
Escola Politécnica - 2019

GABARITO DA P1

28 de março de 2019

Questão 1

Duas cargas puntiformes positivas iguais de valores $+q$ e duas cargas negativas iguais de valores $-q$ encontram-se fixas nos vértices de um **quadrado de lado** a. As cargas de mesmo sinal localizam-se em vértices opostos. Utilizando o sistema de coordenadas indicadado na figura abaixo, cuja origem está no centro de um quadrado, calcule:



(a) (1,0 ponto) O vetor força elétrica sobre a carga positiva 2.

(b) (1,5 ponto) O vetor campo elétrico num ponto P genérico do eixo x, conforme indicado na figura.

Solução da questão 1

(a) O vetor força eletrostática entre a carga 2 e as cargas 1, 3 e 4 são dadas por:

$$\vec{F}_{21} = -k\frac{q^2}{a^2}\hat{\imath}, \quad \vec{F}_{42} = k\frac{\sqrt{2}q^2}{4a^2}(\hat{\imath}+\hat{\jmath}), \quad \vec{F}_{32} = -k\frac{q^2}{a^2}\hat{\jmath}$$

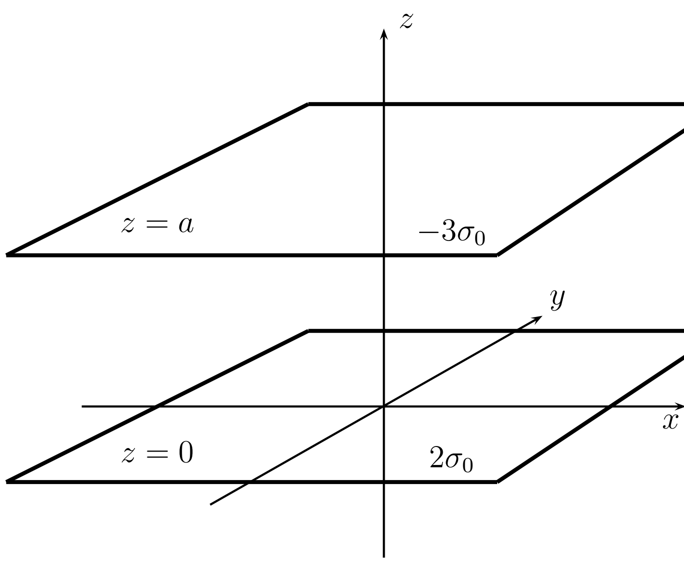
A força resultante sobre a carga 2 é então dada por: $\vec{F}_{32} = k\frac{q^2}{4a^2}(\sqrt{2}-4)(\hat{\imath}+\hat{\jmath})$.

(b) A distância entre a carga 1 (ou 4) e a carga 2 (ou 3) até o ponto P é dada por $d_1 = \sqrt{(x+a/2)^2+(a/2)^2}$ e $d_2 = \sqrt{(x-a/2)^2+(a/2)^2}$, respectivamente. Por simetria a componente do campo elétrico na direção x do campo elétrico é nula, de forma que o campo elétrico resultante é dirigido apenas na direção y, podendo ser escrito da seguinte forma $\vec{E} = 2(E_1\sin\theta_1 - E_2\sin\theta_2)\hat{\jmath}$, onde $E_1 = \frac{kq}{d_1^2}$ e $E_2 = \frac{kq}{d_2^2}$ e $\sin\theta_1 = \frac{a/2}{\sqrt{(x+a/2)^2+(a/2)^2}}$ e $\sin\theta_2 = \frac{a/2}{\sqrt{(x-a/2)^2+(a/2)^2}}$. Portanto,

$$\vec{E} = kqa\left(\frac{1}{\{(x+a/2)^2+(a/2)^2\}^{3/2}} - \frac{1}{\{(x-a/2)^2+(a/2)^2\}^{3/2}}\right)\hat{\jmath}$$

Questão 2

Duas placas planas e infinitas situadas nos planos $z = 0$ e $z = a$ estão carregadas com densidades superficiais de carga $2\sigma_0$ e $-3\sigma_0$, respectivamente, como mostra a figura:

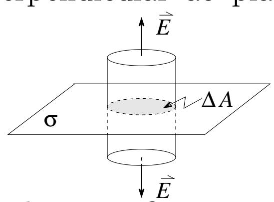


(a) (1,5 ponto) Usando a lei de Gauss, calcule o vetor campo elétrico nas regiões $z < 0$, $0 < z < a$ e $z > a$.

(b) (1,0 ponto) Calcule a diferença de potencial entre as pontos $z = a/2$ e $z = 2a$.

Solução da questão 2

(a) Considere uma placa plana infinita, com densidade superficial de carga σ situada ao longo do eixo z com coordenada $z = d$. Usando a lei de Gauss, cuja superfície gaussiana é cilindro infinitesimal (figura abaixo), por simetria o campo $\vec{E}$ é perpendicular ao plano e aponta na direção $\hat{k}$ se $z > d$) e $-\hat{k}$ se $z < d$.



De acordo com a figura acima, vemos que somente o fluxo do campo elétrico ao longo das tampas será diferente de zero. Além disso, ele só deve depender da distância até o plano. Supondo uma área ΔA infinitesimal situada à uma distância suficientemente próxima do plano de forma que $\vec{E}$ possa ser considerado constante, o fluxo do campo elétrico vale $2E.\Delta A$. Como $q_{int} = \sigma.\Delta A$, obtemos:

$$\overrightarrow{E} = \begin{cases} -\hat{k}\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}, & z < d \\ +\hat{k}\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}, & z > d \,. \end{cases}$$

Usando o resultado acima temos que os campos elétricos produzidos pelas placas com $\sigma = 2\sigma_0$ e $\sigma = -3\sigma_0$ são dados por:

$$\overrightarrow{E}_1 = \begin{cases} -\hat{k}\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, & z < 0 \\ +\hat{k}\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, & z > 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{E}_2 = \begin{cases} +\hat{k}\dfrac{3\sigma_0}{2\epsilon_0}, & z < a \\ -\hat{k}\dfrac{3\sigma_0}{2\epsilon_0}, & z > a \end{cases}$$

Usando o princípio da superposição, temos

$$\overrightarrow{E}_{tot} = \overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2 = \begin{cases} \hat{k}\dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}, & z < 0 \\ \hat{k}\dfrac{5\sigma_0}{2\epsilon_0}, & 0 < z < a \\ -\hat{k}\dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}, & z > a \,. \end{cases}$$

(b) Em termos do campo elétrico, a diferença de potencial entre dois pontos a e b é dada por $V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}.d\vec{\ell}$. Como o campo elétrico é diferente entre as regiões $a/2 < z < a$ e $a < z < 2a$, é conveniente separarmos a integral em duas partes:

$$(V_{2a} - V_a) + (V_a - V_{a/2}) = -\int_{a/2}^{a} \vec{E}.d\vec{\ell} - \int_{a}^{2a} \vec{E}.d\vec{\ell}$$

Como o campo elétrico é constante em cada uma das regiões, o cálculo do potencial elétrico se reduz as expressões:

$$V_{2a} - V_a = (-a\hat{k}) \cdot (-\hat{k}\sigma_0/(2\epsilon_0)) = \frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0}$$

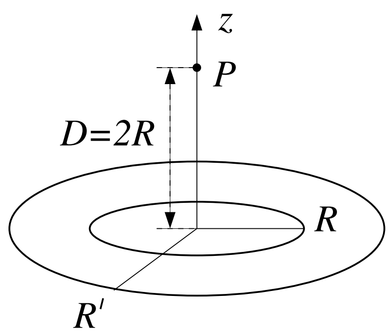
$$V_a - V_{a/2} = -\frac{a}{2}\frac{5\sigma_0}{2\epsilon_0} = -\frac{5}{2}\frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0}$$

Finalmente

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_{2a} - V_{a/2} = -\frac{3}{2}\frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0}\ .}$$

Questão 3

Dois anéis finos concêntricos de raios R e R', encontram-se no plano xy. O centro dos anéis coincide com a origem do sistema de coordenadas, conforme a figura. O anel de raio R possui carga total Q e o anel de raio R' possui carga total Q', ambas uniformemente distribuídas.



(a) (1,0 ponto) Calcule o potencial produzido por cada anel ao longo do eixo z, **como função de** z.

(b) (1,0 ponto) A partir do potencial, calcule a componente z do campo elétrico em P, em termos de Q, Q', R, R' e z. Quanto valem as componentes x e y do campo elétrico? Justifique.

(b) (0,5 ponto) Determine qual deve ser a carga Q' no anel de raio $R' = 3R$ para que ele produza no ponto P do eixo z, que está a uma distância $D = 2R$ da origem, o mesmo potencial eletrostático do anel de raio R.

Solução da questão 3

(a) A distância de cada elemento de carga dq do anel de raio R ao eixo z é a mesma, portanto

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{anel}} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\text{anel}} dq = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Longrightarrow \boxed{V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{[R^2 + z^2]^{1/2}}}.$$

Analogamente, o potencial produzido pelo anel de carga Q' é

$$\boxed{V'(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{[R'^{\,2} + z^2]^{1/2}}}.$$

(b) Por simetria as componentes E_x e E_y do campo elétrico são nulas. A componente z do campo é dada por

$$E_z(z) = -\frac{\partial V_{total}}{\partial z},$$

onde $V_{total} = V(z) + V'(z)$. Portanto,

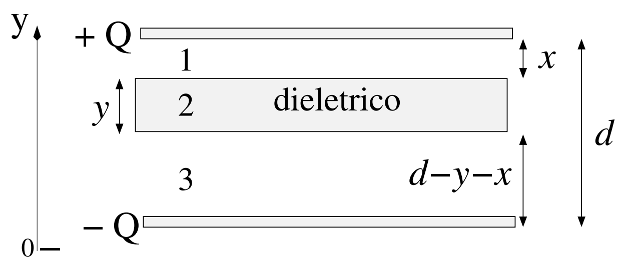
$$E(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Qz}{[R^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{Q'z}{[R'^{\,2} + z^2]^{3/2}} \right].$$

(c) Igualando os potenciais obtidos no item (a) obtemos ($D = 2R$ e $R' = 3R$)

$$V(D) = V'(D) \Longrightarrow Q' = Q \left[\frac{R'^{\,2} + D^2}{R^2 + D^2} \right]^{1/2} = Q \left[\frac{9+4}{1+4} \right]^{1/2} \Longrightarrow \boxed{Q' = \left(\frac{13}{5} \right)^{1/2} Q}.$$

Questão 4

O capacitor mostrado na figura abaixo está parcialmente preenchido por um material dielétrico de constante dielétrica κ e está carregado com uma carga Q. A área do capacitor plano é A, a distância entre as placas é d e a espessura do dielétrico é y. O resto do capacitor encontra-se no vácuo. Determine:



(a) (1,0 ponto) Os vetores campos elétricos nas três regiões no interior do capacitor.

(b) (1,0 ponto) A diferença de potencial entre as placas do capacitor.

(c) (0,5 ponto) A capacitância do capacitor.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) Conforme vimos em sala de aula, o campo elétrico resultante é diferente de zero apenas na região entre as placas e no vácuo vale $-\frac{Q}{A\epsilon_0}\hat{j}$. Na presença de um dielétrico com constante κ, o campo elétrico fica reduzido por um fator κ, de forma que $\vec{E_1} = \vec{E_3} = -\frac{Q}{A\epsilon_0}\hat{j}$ (nas regiões 1 e 3) e $\vec{E_2} = -\frac{Q}{A\kappa\epsilon_0}\hat{j}$ na região 2.

(b) A diferença de potencial entre as placas pode ser calculada a partir da expressão $V_d - V_0 = -\int_0^d \vec{E}.d\vec{\ell}$. Como o campo elétrico é diferente na região 2 é conveniente separarmos a integral em 3 partes: $V_d - V_0 = (V_{d-y-x} - V_0) + (V_{d-x} - V_{d-y-x}) + (V_d - V_{d-x}))$, o que resulta na expressão $V_d - V_0 = \frac{Q}{A\epsilon_0}(d-y) + \frac{Q}{A\kappa\epsilon_0}y$.

(c) A capacitância é definida por $C = Q/(V_d - V_0)$. Usando a expressão para a diferença de potencial do item anterior, obtemos a expressão que $C = \kappa\epsilon_0 A/[\kappa(d-y)+y]$.

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2.$$