Física IV - 4320402

Escola Politécnica - 2015

GABARITO DA PR

4 de fevereiro de 2016

Questão 1

(I) Um farol A emite luz verde de frequência $f_1 = 6 \times 10^{14}$ Hz. Outro farol B, em repouso em relação ao farol A, emite luz vermelha de frequência $f_2 = 4 \times 10^{14}$ Hz. Um observador que se move com velocidade v em relação aos farois vê as luzes emitidas pelos farois A e B com as cores trocadas. Isto é, para esse observador o farol A emite luz vermelha com frequência f_2 e o farol B emite luz verde com frequência f_1.

(a) (0,5 ponto) Em que sentido se move o observador? De A para B, ou de B para A?

(b) (1,0 ponto) Calcule a velocidade do observador em relação à velocidade da luz.

(II) Um sistema inercial S' move-se com velocidade $0,6c$ em relação ao sistema S no sentido positivo do eixo x. Os referenciais coincidem no instante $t = t' = 0$. Dois eventos são registrados. No referencial S o evento 1 ocorre na origem de S no instante $t_1 = 0$ e o evento 2 ocorre no eixo x no ponto com coordenada $x_2 = 3$ km no instante $t_2 = 4\mu$s.

(a) (0,5 ponto) Calcule a diferença de tempo $\Delta t' \equiv t'_2 - t'_1$ entre os dois eventos no referencial S'.

(b) (0,5 ponto) No referencial S' qual dos dois eventos ocorre antes?

Solução da questão 1

(I) Efeito Doppler.

(a) A mudança na frequência da luz dos faróis é devida ao efeito Doppler. Como a frequência da luz do farol A diminui, o observador está se afastando de A. A frequência da luz do farol B aumenta, portanto o observador está se aproximando de B. Assim, o sentido do movimento é de A para B.

(b) O deslocamento na frequência da luz de uma fonte que se aproxima com velocidade v de um observador é dada por

$$f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \equiv f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

onde f é a frequência medida pelo observador, f_0 é a frequência no referencial onde a fonte está em repouso e $\beta = v/c$. Para o farol B, $f = f_1$ e $f_0 = f_2$.

$$f_1 = f_2\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Longrightarrow \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Longrightarrow \frac{9}{4} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \Longrightarrow \beta = \frac{5}{13} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{5}{13}c}.$$

(II) Transformações de Lorentz.

(a) Usando as expressões que relacionam as coordenadas em S e S' obtemos

Evento 1: $t_1' = 0$.

Evento 2: $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-(0,6c)^2/c^2}} = \dfrac{5}{4}$

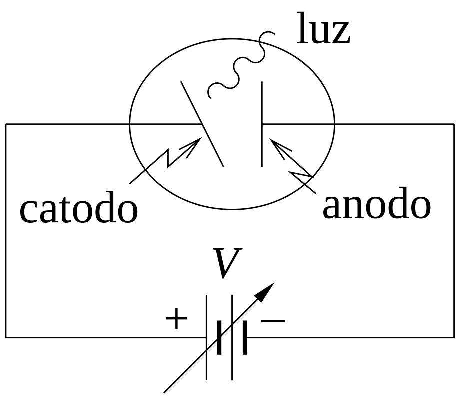
$$t_2' = \gamma\left(t - \frac{0,6c\,x_2}{c^2}\right) = \frac{5}{4}\left(4\times10^{-6} - \frac{(0,6)\,(3\times10^3)}{3\times10^8}\right) = -2,5\times10^{-6} = -2,5\ \mu\text{s}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta t' = -2,5\ \mu\text{s}}.$$

(b) Como $\Delta t' < 0$, o evento 2 ocorre antes do evento 1 no referencial S'. No referencial S o evento 2 ocorre 4 μs depois do evento 1. A luz necessita de um tempo igual a $(3\times10^3)/(3\times10^8) = 10\ \mu$s para percorrer os 3 km que separam os eventos 1 e 2. Assim, não existe uma relação causal entre os eventos 1 e 2. Neste caso, a ordem em que os eventos ocorrem depende do sistema de referência.

Questão 2

(I) (1,0 ponto) Para determinar a função de trabalho ϕ de um metal constrói-se uma célula fotoelétrica com um catodo feito deste metal. A célula é conectada a uma fonte de voltagem ajustável conforme a figura. Note que os fotoelétrons são freiados pela ddp V.



Iluminando o catodo com um laser de frequência f uma corrente flui pelo circuito se $V < V_0$. Calcule a função de trabalho ϕ do metal.

(II) Considere o espalhamento de um fóton por um elétron em repouso de massa m_0 (espalhamento Compton).

(a) (1,0 ponto) Escreva a equação que expressa a conservação de energia neste espalhamento. Determine a energia cinética do elétron espalhado em termos dos comprimentos de onda do fóton incidente, do fóton espalhado e das constantes h e c.

(b) (0,5 ponto) Determine os ângulos de espalhamento do fóton para os quais a energia cinética do elétron é máxima e mínima, respectivamente.

Solução da questão 2

(I) O elétron é emitido com um energia cinética $E_{cin} = hf - \phi$, onde ϕ é a função de trabalho. Denominando V_A o potencial no anodo e V_C o potencial do catodo, $V_C - V_A = V_0$ e a conservação de energia fornece.

$$-eV_C + E_{cin} = -eV_A \Longrightarrow e(V_C - V_A) = hf - \phi \Longrightarrow \boxed{\phi = hf - eV_0}.$$

(II) Efeito Compton

(a) A conservação de energia fornece

$$h\frac{c}{\lambda} + m_0c^2 = h\frac{c}{\lambda'} + mc^2 \Longrightarrow E_{cin} = mc^2 - m_0c^2 = h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda'},$$

onde λ' (λ) é o comprimento de onda do fóton depois (antes) do espalhamento, m_0 é a massa de repouso do elétron e $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

(b) Assim, quanto maior λ' maior E_{cin} e quanto menor λ' menor E_{cin}. O comprimento de onda do fóton espalhado é dado pela fórmula de deslocamento de Compton:

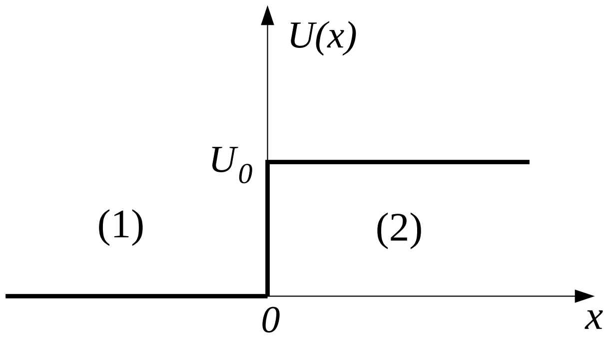
$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta).$$

A energia cinética máxima do elétron ocorre quando $\theta = \pi$. A energia cinética mínima ocorre quanto $\theta = 0$, neste caso $\lambda' = \lambda$, $E_{cin} = 0$ e não ocorre espalhamento.

Questão 3

Uma partícula de massa m e energia constante $E > U_0$, move-se no sentido positivo do eixo x na presença de um degrau de potencial.

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ U_0 & x \geq 0 \end{cases}$$



(a) (0,5 ponto) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo desta partícula para $x < 0$ (região (1)) e para $x \geq 0$ (região (2)).

(b) (1,0 ponto) As soluções da equação de Schrödinger podem ser escritas como combinações lineares de $\exp(\pm ik_1x)$ na região (1) e $\exp(\pm ik_2x)$ na região (2). Determine k_1 e k_2 e escreva as combinações lineares fisicamente aceitáveis nas duas regiões.

(c) (1,0 ponto) Que condições as soluções encontradas no item (b) devem satisfazer no ponto $x = 0$?

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(a) A equação de Schrödinger na região (1) é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = E\psi_1 \tag{1}$$

e na região (2) é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + U_0\psi_2 = E\psi_2 \tag{2}$$

(b) Substituindo $e^{\pm ik_1x}$ na equação (1) obtemos

$$\frac{\hbar^2}{2m}k_1^2e^{\pm ik_1x} = Ee^{\pm ik_1x} \Longrightarrow k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Substituindo $e^{\pm ik_2x}$ na equação (2) obtemos

$$\frac{\hbar^2}{2m}k_2^2e^{\pm ik_2x} + U_0e^{\pm ik_2x} = Ee^{\pm ik_2x} \Longrightarrow k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}.$$

Na região (1) a solução geral da equação de Schrödinger é

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}.$$

A solução Ae^{ik_1x} corresponde à onda incidente que se desloca no sentido crescente do eixo x. A solução Be^{-ik_2x} corresponde à onda refletida pelo degrau que se desloca no sentido decrescente do eixo x.

Na região (2) a solução geral da equação de Schrödinger é

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}.$$

A solução De^{-ik_2x} que corresponde a uma onda que se desloca no sentido de x decrescente só pode existir na região (1) devido à possibilidade da partícula ser refletida pelo degrau de potencial. <u>Portanto $D = 0$ para a solução fisicamente aceitável na região (2).</u>

(c) A função de onda e sua derivada devem ser contínuas em $x = 0$, ou seja

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Leftrightarrow A + B = C,$$
$$\left.\frac{d\psi_1}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=0} \Leftrightarrow k_1(A-B) = k_2C.$$

Questão 4

Considere a função de onda do estado fundamental do átomo de hidrogênio $\Psi_{1s}(r,t) = \psi_{1s}(r)e^{-iE_1t/\hbar}$, onde

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

e a_0 é o raio de Bohr.

(a) (0,5 ponto) Calcule a densidade de probabilidade radial $P(r)$ tal que $P(r)dr$ fornece a probabilidade de encontrar o elétron numa camada esférica de raio interno r e raio externo $r + dr$ no estado fundamental do H.

(b) (1,0 ponto) Calcule a probabilidade $p(r)$ de encontrar o elétron do H dentro de uma esfera de raio r centrada na origem do sistema de coordenadas utilizado. Expresse sua resposta em termos da variável $x \equiv r/a_0$.

(c) (0,5 ponto) Escreva (não é necessário resolvê-la) a equação que permite encontrar o raio da esfera para a qual a probabilidade de encontrar o elétron do H no estado fundamental dentro da esfera é igual à probabilidade de encontrá-lo fora da esfera.

(d) (0,5 ponto) Qual é o valor do momento angular orbital do elétron e de sua projeção ao longo do eixo z quando o átomo de H está no estado fundamental?

Solução da questão 4

(a) A probabilade de encontrar o elétron numa camada esférica de raio r e espessura dr no estado fundamental do H é

$$P(r)dr = 4\pi r^2 |\psi_{1s}(r)|^2 dr = \left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right) e^{-2r/a_0} dr.$$

(b) A probabilidade de achar o elétron a uma distância menor do que r é

$$p(r) = \int_0^r \left(\frac{4r'^2}{a_0^3}\right) e^{-2r'/a_0} dr' = \frac{1}{2}\int_0^{2x} y^2 e^{-y} dy = -\frac{1}{2}(y^2+2y+2)e^{-y}\Big|_0^{2x}$$
$$= 1 - e^{-2x}(2x^2+2x+1),$$

onde $x = r/a_0$.

(c) O raio r da esfera para o qual a probabilidade de encontrar o elétron dentro e fora dela é a mesma é obtida colocando-se $p(r) = 0,5$.

$$1/2 = 1 - e^{-2x}(2x^2+2x+1) \Longrightarrow 2e^{-2x}(2x^2+2x+1) - 1 = 0.$$

(d) No estado fundamental $\ell = 0$ e $m_\ell = 0$. Assim o momento angular orbital $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = 0$ e sua projeção $L_z = m_\ell \hbar = 0$.

Formulário

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \gamma\,(x' + ut')\,, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{ux'}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

$1\ \mu\text{s} = 10^{-6}$ s; $\quad f' = f\sqrt{\dfrac{c-v}{c+v}}$; $\quad$ ou $\quad f' = f\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}$

$E = \gamma m_0 c^2$, $\quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{u}$, $\quad K = (\gamma - 1) m_0 c^2$, $\quad E_f = hf = hc/\lambda$, $\quad K_{máx} = hf - \phi$,

$\lambda = \lambda_0 + \dfrac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do <u>fóton</u>,

$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$, $\quad \int y^2 e^{ay} dy = \dfrac{e^{ay}}{a}\left(y^2 - \dfrac{2y}{a} + \dfrac{2}{a^2}\right)$,

$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$, $L_z = m_\ell\,\hbar$, $S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar$, $S_z = m_s\,\hbar$.