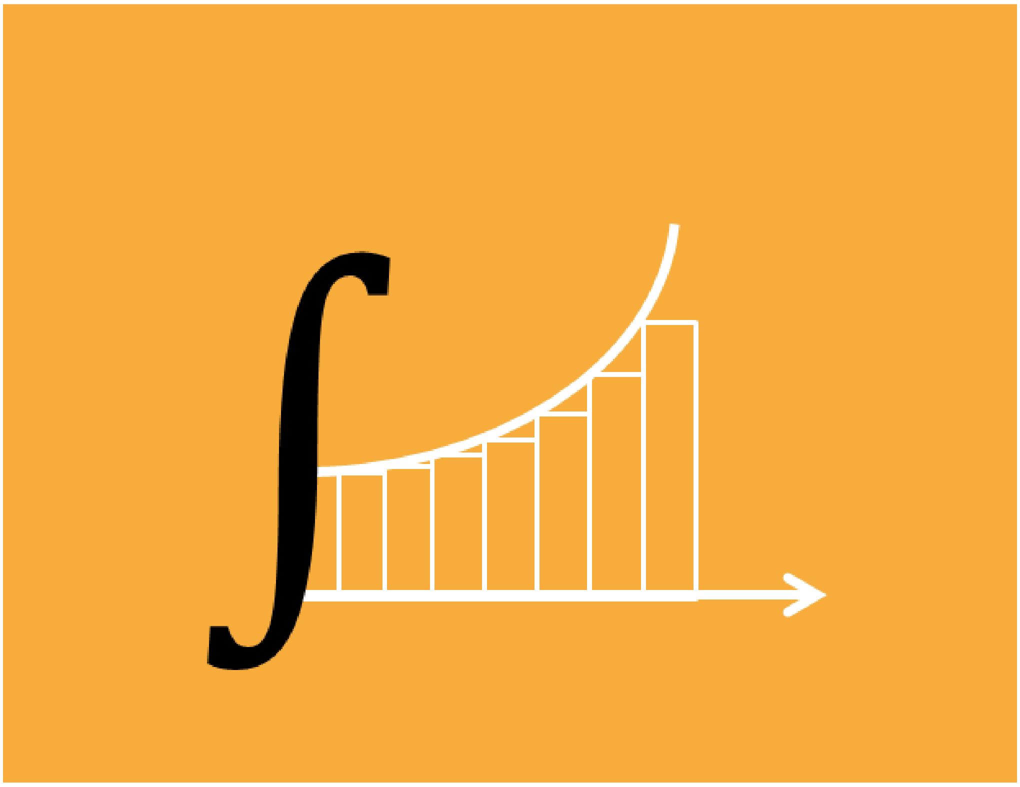
- RESUMÃO -
INTEGRAIS

(Cálculo)

Formulário, Dicas e Macetes para a Prova



Responde Aí

www.respondeai.com.br

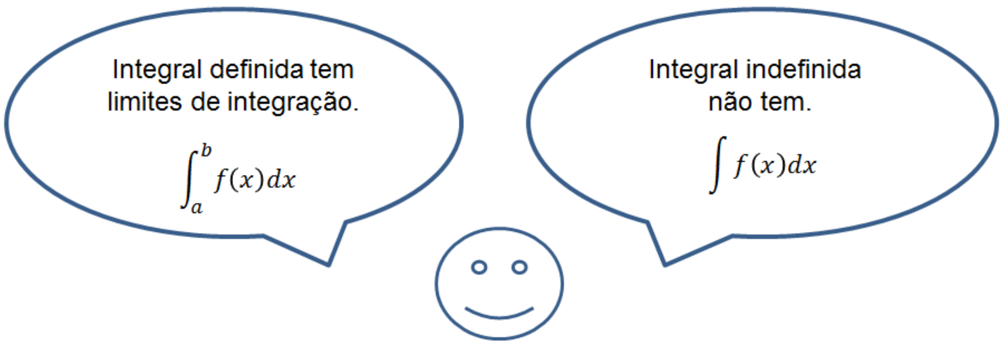
Você me pergunta o que é integral. Eu te respondo: é uma área! =)

Propriedades das Integrais

Estas são coisas que nunca esquecemos: o dia do nosso aniversário, nosso filme favorito e as propriedades das integrais!

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$	$\int_a^a f(x)dx = 0$
$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, c constante	$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$, c constante
Se $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$	

Integral Definida e Indefinida



Hora do Bizu:

A Integral DEFINIDA dá um valor como resultado;
a Integral INDEFINIDA dá uma função.

NÃÃÃÃÃÃÃÃO esquece da <u>constante de integração</u> na INDEFINIDA, hein!!

Principais Primitivas

Que bom que alguém resolveu montar essa tabelinha de primitivas pra você, né? Afinal, elas sempre aparecem!

As mais comuns		
$\int k\,dx = kx + C$		$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
Trigonométricas		
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int \operatorname{cossec}^2 x\;dx = -\operatorname{cotg} x + C$	$\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$	$\int \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x + C$
$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C$		$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + C$

Teorema Fundamental do Cálculo

O T.F.C. é meio assim...
A parte 1 diz que a derivada da integral da função recupera a própria função.
A parte 2 diz que integral da derivada da função recupera a função também.
Mas cadê os detalhes, então?

Parte 1	**Parte 2**
✓ Pelo menos um dos limites de integração é uma função de uma variável **diferente** daquela na qual integramos. ✓ f é contínua no intervalo de integração.	✓ Começamos com uma integral definida. ✓ $F'(x) = f(x)$. ✓ f é contínua no intervalo de integração.
Fórmulas	
$\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))g'(x)$	$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$

Integral por Substituição

- Simplifica a visualização: chegamos a uma **integral conhecida**.
- Use quando você conseguir dividir o que está sendo integrado em duas partes: uma função (u) vezes a derivada dessa função (du).
- **Mudança de variáveis** (para integrais definidas, muda-se os limites de integração).

A forma como resolver está abaixo. Parece até um poema romântico, não?

Integral por Substituição

Integral Indefinida

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

- $u = g(x)$ é diferenciável
- A imagem de u é um intervalo I
- f é contínua em I

Integral Definida

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

- g'é contínua em $[a,b]$
- f é contínua na variação de u

$$\int 6x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

Fazemos $\int 2.\sqrt{x^3+1}.3x^2\,dx$ e definimos $u = x^3+1$, de modo que $du = 3x^2du$.

Substituindo: $\int 2.\sqrt{x^3+1}.3x^2\,dx = \int 2.u^{\frac{1}{2}}du = 2.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{3}\sqrt{u^3} + C$

Voltando DE u para x: $\frac{4}{3}\sqrt{u^3} + C = \frac{4}{3}\sqrt{(x^3+1)^3} + C$.

Ok, e se fosse $\int_0^1 6x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$?

Resolve tudo e substitui os limites no final:

$$\int_0^1 6x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$
$$= \frac{4}{3}\sqrt{(x^3+1)^3}\Big|_0^1$$
$$= \frac{4}{3}\sqrt{8} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

OU

Resolve em função de u e muda os limites:

$$u = x^3+1: \begin{cases} x = 0 \to u = 1 \\ x = 1 \to u = 2 \end{cases}$$
$$\int_0^1 6x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int_0^1 2u^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{4}{3}\sqrt{u^3}\Big|_1^2$$
$$= \frac{4}{3}\sqrt{8} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Integral por Partes

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

Como escolher o $u(x)$? → Seguir a ordem das letras na palavra **LIATE**.

L→ Logarítmica ($\ln x$)
I→ Inversa trigonométrica ($\text{arcsen}\,x$, $\text{arctg}\,x$, ...)
A→ Algébrica (ou polinomial) (x^n)
T→ Trigonométrica ($\text{sen}\,x$, $\cos x$, $\sec x$, ...)
E→ Exponencial (e^x)

Ou seja, apareceu multiplicação entre uma função logarítmica e uma exponencial, tente primeiro fazer a logarítmica $= u(x)$. O termo do $v'(x)$ é o que sobra.

Ex: $\int x.\text{sen}(x)\,dx$

Opa, pintou uma função polinomial (algébrica) e uma trigonométrica! Então escolhemos a polinomial primeiro: $u(x) = x$. E sobrou o quê? $v'(x) = \text{sen}(x)$, viu?

Lembre-se que $u(x) = x \to u'(x) = 1$ e $v'(x) = \text{sen}(x) \to v(x) = -\cos(x)$.
Então fica: $\int x.\text{sen}(x)\,dx = \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$.

Substituindo: $\int x.\text{sen}(x)\,dx = x.(-\cos(x)) - \int(-\cos(x)).(1)dx$
$= -x.\cos(x) + \int \cos(\text{x})dx$
$= -x.\cos(x) + \text{sen}(x) + C$

Paaaaaaara tudo! E se fosse Integral Definida? Bom, era só carregar os limites de integração...

Ex: $\int_0^\pi x\,.\,\text{sen}(x)\,dx = -x.\cos(x) + \text{sen}(x)|_0^\pi$
$= [-\pi.\cos(\pi) + \text{sen}(\pi)] - [0.\cos(0) + \text{sen}(0)]$
$= \pi$

Integrais Trigonométricas

A dica é usar as relações trigonométricas listadas aqui para chegar a uma integral que a gente consiga executar:

$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta$	$1 + \operatorname{cotg}^2 \theta = \operatorname{cossec}^2 \theta$
$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y \pm \operatorname{sen} y \cdot \cos x$	$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$	
$\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$	$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$	
$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$	
$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$	$\operatorname{sen} x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$	
$\cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$	$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$	

Tipo assim... o cara pediu a integral do $\operatorname{sen}^2(x)$. Não sabemos isso, mas sabemos que $\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)$. Viu, ali na tabela?

Então fica fácil: $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$. Logo:

$$\int \operatorname{sen}^2(x)dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C.$$

Integral por Substituição Trigonométrica

Esse método é ótimo para resolver as integrais com quocientes de polinômios em que algum termo seja similar a $(x^2 \pm a^2)$ ou $(a^2 - x^2)$ elevado a algum expoente.

Também vale se o termo estiver dentro da raiz (como é em **90%** dos casos).

Esse método é complicadinho, mas tem um passo a passo. Se liga no passo a passo com o exemplo:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$$

1. **Identificar o caso da substituição trigonométrica de acordo com o quadro abaixo e quem é o a.**

Expressão	Substituição
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a.sen\theta$, com $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a.tg\theta$, com $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a.\sec\theta$, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

Bem, como temos $\sqrt{4-x^2} \to a = 2$ e temos que olhar para o 1º caso na tabela.

2. **Aplicar a substituição recomendada e calcular dx**

$$x = 2.sen\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$
$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

3. **Substituir na integral dada**

$$\frac{\sqrt{4-x^2}dx}{x^2} = \frac{\sqrt{4-4sen^2\theta}.2\cos\theta\, d\theta}{4sen^2\theta} = \frac{\sqrt{4(1-sen^2\theta)}.2\cos\theta\, d\theta}{4sen^2\theta} =$$
$$= \frac{\sqrt{4\cos^2\theta}\,.2\cos\theta\, d\theta}{4sen^2\theta} = \frac{2|\cos\theta|.2\cos\theta\, d\theta}{4sen^2\theta}$$

Mas no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, o cosseno é sempre positivo. Por isso, $|\cos(\theta)| = \cos(\theta)$.

$$\frac{4\cos^2\theta}{4sen^2\theta}d\theta = cotg^2\theta d\theta$$

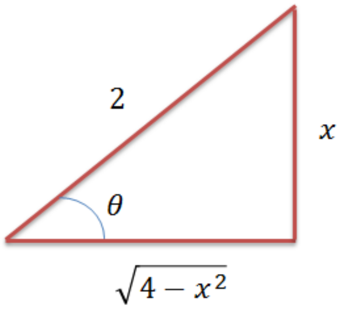
4. **Resolver a integral na variável θ**

$$\int cotg^2\theta d\theta = \int (cossec^2\theta - 1)d\theta = -cotg\theta - \theta + C$$

(Usamos a identidade trigonométrica $cossec^2\theta = 1 + cotg^2\theta$)

5. Usar o triângulo retângulo para converter o θ na variável inicial

Vamos imaginar um pouco agora... se $x = 2\text{sen}(\theta)$, vamos desenhar um triângulo que tem um ângulo θ cujo seno valha $x/2$, conforme a equação. Percebeu? O outro cateto dá para achar usando Teorema de Pitágoras: $\sqrt{4-x^2}$.



Agora, pela figura, cadê a $\text{cotg}(\theta)$?

$$\text{cotg}(\theta) = \frac{1}{tg(\theta)} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

E, naturalmente, se $x = 2\text{sen}(\theta)$, o que se há de dizer sobre θ? Bem, $\theta = \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Substituindo finalmente os valores: $-\text{cotg}(\theta) - \theta + C = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C$.

Deu trabalho, eu sei. Mas tudo que você precisa está aqui nesse resumão! =)

Frações Parciais

Hora da "mágica": transformar uma fração de polinômios em duas ou mais frações.

Por quê? Porque não dá ou é difícil de integrar a fração original.
Como? Usando um método de abertura dos termos.
E o que eu preciso? Que o grau do numerador seja **menor** que o do denominador.

Algum conhecimento prévio? Bem, vale lembrar alguns métodos de **divisão polinomial**:

Caso 1: denominador é produto de termos de grau 1 distintos

$$\frac{3x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$\frac{5x}{x^2+4x+3} = \frac{5x}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$$

Caso 2: denominador é produto de alguns termos de grau 1 repetidos

$$\frac{x^2}{(x+1)^3} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

$$\frac{3x-7}{x^3(x-5)^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{(x-5)} + \frac{E}{(x-5)^2} + \frac{F}{(x+1)}$$

Caso 3: denominador possui termos de grau 2 irredutíveis

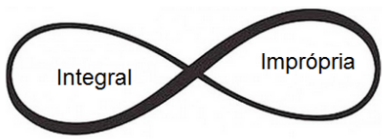
$$\frac{4x+13}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

$$\frac{121x^2-7x+3}{x^2(x^2+13)^3(7-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+13)} + \frac{Ex+F}{(x^2+13)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+13)^3} + \frac{I}{7-x}$$

Agora, amigo, é só juntar todos os termos do lado direito e resolver o sistema pelas igualdades geradas.
Daí, você achará as variáveis (A, B, etc). Depois, é só integrar as frações individualmente! ;)

Integral Imprópria

É hora de pensar no infinito...
E isso pode surgir de duas formas:



descontinuidade no intervalo da função a ser integrada

ou

pelo menos um dos limites de integração é **infinito**, ou seja, $+\infty$ ou $-\infty$

Separamos em dois intervalos na descontinuidade:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

é só substituí-lo e calcular o limite:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

Teorema de Comparação

Em alguns casos, teremos que analisar a convergência de uma integral. Para isso, basta usar o **Teorema de Comparação:**

Se $f(x) \geq g(x)$ no intervalo analisado, então:

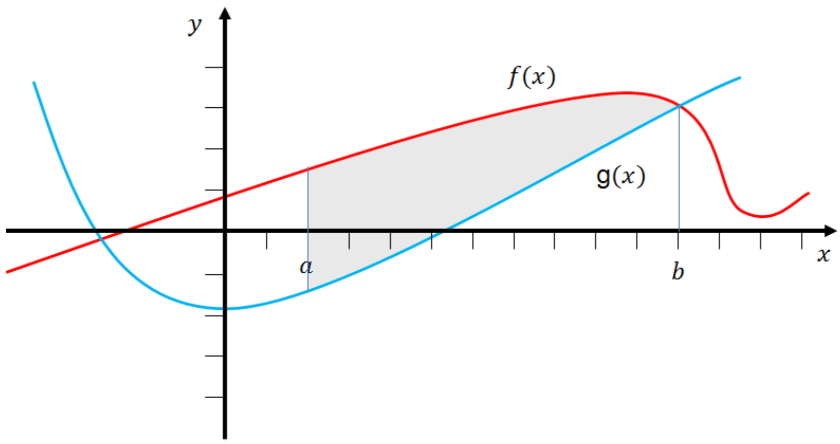
- se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é **convergente**, então $\int_a^\infty g(x)\,dx$ será **convergente também**;
- se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é **divergente**, então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ será **divergente também**.

Área entre Curvas

Áreas: todo o propósito da integral.

Imaginando um intervalo $[a, b]$ para o qual $f(x)$ seja maior que $g(x)$ em todo intervalo, teríamos a área dessa forma:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



Fique atento: se aparecer algo do tipo $A = \int f(y)dy$, a função é do tipo $x = f(y)$ e a área calculada é entre a curva e o eixo y!!!

Volumes com Integrais

Calculamos o volume por dois métodos:
Suas fórmulas seriam, pensando que giram em torno ou de um $y = L$ paralelo a x ou de um eixo $x = L$ paralelo ao y.

1. **seções transversais**: usado quando giramos a $f(x)$ em torno de $\boldsymbol{x}$

$$V = \int_a^b \pi[f(x) - L]^2 \, dx$$

2. **cascas cilíndricas**: quando $f(x)$ é girada em torno do eixo $\boldsymbol{y}$

$$V = \int_a^b 2\pi(x - L) \, f(x) \, dx$$

> **Hora do Bizu:**
>
> Pode ser necessário calcular diferença de volumes, é só fazer de cada parte e subtrair.

Comprimento de Arco

Só fazer a fórmula e correr para o abraço:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

A função inversa também pode aparecer né, algo do tipo $x = g(y)$, aí a fórmula fica assim:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$$