Solução

0303200 – Probabilidades | Turma: | Prof: | REC, 2019

Nome (completo):

Teste 1 Duas variáveis aleatórias contínuas X e Y têm densidade de probabilidade conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y), & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A densidade condicional de Y dado X é, para $0 < y < 1$,

[A] $f(y|x) = \frac{2x}{1+2x-3x^2}$.
[C] $f(y|x) = 1 + 2x - 3x^2$.
[E] $f(y|x) = 2(x+y)$.
[B] $f(y|x) = \frac{2y}{1+2x-3x^2}$.
■ $f(y|x) = \frac{2(x+y)}{1+2x-3x^2}$.

Teste 2 A urna 1 contém 2 bolas brancas e 3 azuis, enquanto que a urna 2 contém 6 bolas brancas e 4 bolas vermelhas. Joga-se uma moeda honesta: se der cara, retira-se 1 bola da urna 1; caso contrário retira-se 1 bola da urna 2. Sabendo-se que a cor da bola retirada foi branca, qual a probabilidade da moeda jogada ter resultado "cara"?

[A] 1/2. [B] 4/5. ■ 2/5. [D] 1/5. [E] 1/3.

Teste 3 Dada a seguinte distribuição de probabilidades, calcular média da variável $Z = T_1 + T_2$:

$$f_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = (x^2 - a^2)e^{-x(t_1+t_2)+a(t_2-t_1)} \qquad \text{para } t_1 > 0, t_2 > 0 \text{ (igual a zero fora desse conjunto).}$$

[A] $(x^2 - a^2)(t_1 + t_2)/4$.
[C] $(x^2 - a^2)/4$.
[E] $2a/x^2$.
■ $2x/(x^2 - a^2)$.
[D] $(t_1 + t_2)/2$.

Teste 4 Uma editora verificou que um de seus livros, de 150 páginas, apresentava 100 erros tipográficos em média. Calcule a probabilidade de um leitor se deparar com mais de 1 erro nas primeiras 3 páginas do livro.

[A] $1 - e^{-2}$. [B] $e^{-2/3}$. [C] $1 - 3e^{-2/3}$. [D] e^{-2}. ■ $1 - 3e^{-2}$.

Teste 5 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com correlação $\rho(X,Y) = 0$, e a combinação linear

$$W = X - 2Y.$$

Sabendo-se que $E(X) = 10$, $E(X^2) = 120$, $E(Y) = 5$ e $E(Y^2) = 80$, a variância de W é:

■ 240. [B] 75. [C] 325. [D] 130. [E] 90.

Teste 6 O raio de uma esfera é um número aleatório uniformemente distribuído entre L e $3L$. Qual o valor esperado do volume da esfera?

[A] $56\pi L^3/3$. [B] $32\pi L^3/3$. ■ $40\pi L^3/3$. [D] $9\pi L^3$. [E] $18\pi L^3$.

Teste 7 Um estudo de uma escola particular de ensino médio constatou que as pontuações de seus alunos na prova de "Linguagem, códigos e suas tecnologias" do Enem são normalmente distribuídas com uma média de 529 e uma variância de 4268. As pontuações de seus alunos na prova "Matemática e suas tecnologias" são normalmente distribuídas com uma média de 479 e uma variância de 5732. Dois alunos dessa escola foram selecionados aleatoriamente. Considere que X é uma variável aleatória que indica a pontuação na prova de *Linguagem* do primeiro aluno e Y a pontuação da prova de *Matemática* do segundo aluno. Suponha que X e Y são independentes. A probabilidade $P(X > Y)$ vale:

■ 0,6915. [B] 0,9123. [C] 0,1915. [D] 0,3085. [E] 0,8085.

Solução

Teste 8 A experiência indica que a vida remanescente de um dispositivo não é afetada pelo tempo de vida anterior e segue uma distribuição exponencial. De um lote de 100 dispositivos idênticos, observa-se que $100(1-e^{-0{,}5})$ destes falham antes de 1000 h. Selecionam-se aleatoriamente 4 dispositivos de um outro lote de dispositivos idênticos. Qual a probabilidade dos 4 dispositivos durarem mais de 500 h?

A $4e^{-0{,}1}$. ■ e^{-1}. C $1-e^{-1}$. D e. E $4e^{-0{,}25}$.

Teste 9 Uma máquina (A) produz 100 kg de balas por dia, sendo que 14% das balas produzidas não atingem a especificação exigida por um supermercado. Uma nova máquina (B) foi adquirida e produz 200 kg de balas por dia, sendo que 8% delas não atingem a especificação do supermercado. Sabe-se que a produção das duas máquinas é misturada. Coletada uma amostra aleatória de 12 balas da produção, a probabilidade de que esta amostra contenha exatamente duas balas fora da especificação é:

■ $0{,}66 \times (0{,}9)^{10}$. B $0{,}14 \times (0{,}08)^{10}$. C 0,2. D $0{,}33 \times (0{,}1)^{10}$. E 0,1.

Teste 10 Uma urna contém 7 bolas brancas e 3 bolas pretas. São retiradas 4 bolas sem reposição. Qual a probabilidade de serem obtidas 2 bolas de cada cor?

A 1/4. B 1/20. C 29/128. ■ 3/10. E 1/2.

Teste 11 A polícia rodoviária inspeciona em média 30 veículos por hora em um ponto da estrada. Historicamente há 1 veiculo irregular a cada 10 inspecionados. Na última hora foram encontrados 6 veículos irregulares. Para avaliar se a média mudou para 2 veículos irregulares a cada 10 inspecionados o policial calcula a probabilidade de ser razoável a ocorrência da última hora. O valor encontrado é:

■ $\binom{30}{6}(0{,}1)^6(0{,}9)^{24}$. C $\binom{6}{2}(0{,}1)^6(0{,}8)^0$. E $\binom{30}{6}(0{,}2)^6(0{,}9)^{24}$.

B $\binom{6}{2}(2/30)^6(8/30)^{24}$. D $\binom{30}{6}(2/30)^6(8/30)^{24}$.

Teste 12 Uma variável aleatória discreta inteira k possui distribuição uniforme no conjunto $\{0,1,2,\ldots,7\}$. Definindo-se a variável aleatória $X = \frac{\pi k}{4}$ e $Y = |\mathrm{sen} X|$, os valores de $E[Y]$ e $E[X|Y<0{,}5]$ são, respectivamente:

A $\sqrt{2}/2$ e 1. ■ $(\sqrt{2}+1)/4$ e $\pi/2$. E 1 e π.

B $\sqrt{2}/2$ e $3\pi/2$. D 1 e 0.

Teste 13 Uma maratona é uma corrida de 42 km. O tempo de prova para maratonistas pode ser modelado, em torno de sua média, como uma distribuição normal, com uma variância de 625 min^2 e média de 195 min. Em até quanto tempo os 8% mais rápidos terminam a prova?

A 2 horas e 40 minutos. ■ 160 minutos. C 100 minutos. D 1 hora. E 250 minutos.

Teste 14 Suponha que um indivíduo jogue um jogo de azar em que é possível perder R\$1,00, empatar, ganhar R\$3,00 ou ganhar R\$5,00 cada vez que ele joga. A distribuição de probabilidade para cada resultado é fornecida pela tabela seguinte.

Saída	−R\$1,00	R\$0,00	R\$3,00	R\$5,00
Probabilidade	x	0,40	y	0,10

Sabendo-se que em média o indivíduo ganha R\$0,80 por jogo, os valores de x e y são respectivamente:

A 0,20 e 0,30. ■ 0,30 e 0,20. C 0,10 e 0,40. D 0,50 e 0,00. E 0,40 e 0,10.

Solução

Teste 15 Um experimento aleatório tem espaço amostral $S = \{a,b,c,d\}$. Suponha que $P(\{c,d\}) = 3/8$, $P(\{b,c\}) = 6/8$ e $P(\{d\}) = 1/8$. O valor de $P(\{a\})$ é:

A 2/8. B 6/8. C 7/8. D 4/8. ■ 1/8.

Teste 16 O tempo de vida de um componente elétrico é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre 90h e 210h, que corresponde a uma variância de 1200h^2. Ao falhar, o componente é imediatamente substituído por um outro do mesmo tipo. Dispõe-se de 48 componentes iguais e independentes. Qual a probabilidade de que se ainda tenha em operação um componente depois de um total de 7560 horas de operação?

A 0,4332 B 0,3413 C 0,1587 ■ 0,0668 E 0,9332

Probabilidade (espaço amostral S, eventos $A,B,\ldots$): $\mathbb{P}(A) \geq 0$; $\mathbb{P}(S) = 1$; $\mathbb{P}(\cup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$ para eventos A_i disjuntos. **Probabilidade condicional**: $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$. Temos: $\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$ se $\{B_i\}$ formam uma partição de S. Eventos $A_1,\ldots,A_n$ são **independentes** se $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$ para qualquer escolha de $i_1,\ldots,i_k$. Número de possíveis escolhas ordenadas de k elementos entre n elementos (arranjos): $n!/(n-k)!$. Número de possíveis escolhas não-ordenadas de k elementos entre n elementos (combinações): $n!/(k!(n-k)!) = \binom{n}{k}$.

Variável aleatória: função de S para números reais. Variável aleatória X pode ser discreta (por exemplo, valores são números inteiros); nesse caso sua distribuição é caracterizada pela função $\mathbb{P}(X = x)$ para todo valor x de X e sua esperança é $\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$. Variável aleatória pode ser contínua (por exemplo, valores formam intervalo dos reais); nesse caso sua distribuição é caracterizada pela densidade $f_X(x)$, definida como a derivada de $F_X(x)$, onde $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ é a função de distribuição cumulativa de X ($F_X(x)$ é não-decrescente, tende a 0 para $x \to -\infty$, e tende a 1 para $x \to \infty$). Portanto $f_X(x) = d\mathbb{P}(X \leq x)/dx$ e $\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f_X(x)dx$. A esperança de variável aleatória contínua X é $\mathbb{E}[X] = \int x f_X(x)dx$. A variância de uma variável aleatória X qualquer é $V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$; o momento de ordem k de X é $\mathbb{E}[X^k]$. Se $h(X)$ é uma função de variável aleatória X, então $\mathbb{E}[h(X)] = \sum_i h(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$ se X é discreta, e $\mathbb{E}[h(X)] = \int h(x) f_X(x)dx$ se X é contínua.

Bernoulli (um ensaio, com valores 0 e 1): $p = \mathbb{P}(X = 1)$, e $\mathbb{E}[X] = p$; $V[X] = p(1-p)$.

Binomial (n ensaios, p probabilidade de sucesso): $\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, e $\mathbb{E}[X] = np$, $V[X] = np(1-p)$.

Geométrica (p probabilidade de sucesso): $\mathbb{P}(X = x) = p(1-p)^x$, e $\mathbb{E}[X] = (1-p)/p$, $V[X] = (1-p)/p^2$.
Poisson (parâmetro λ): $\mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda}\lambda^x/x!$, e $\mathbb{E}[X] = V[X] = \lambda$.
Uniforme entre a e b: $f_X(x) = 1/(b-a)$ entre a e b, e $\mathbb{E}[X] = (a+b)/2$, $V[X] = (b-a)^2/12$.
Normal $N(\mu,\sigma^2)$: $f_X(x) = (1/\sqrt{2\pi\sigma^2})\exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$, e $\mathbb{E}[X] = \mu$, $V[X] = \sigma^2$. Se X é $N(\mu,\sigma^2)$ e $Y = aX + b$ com $a \neq 0$, então Y é $N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$.
Exponencial (parâmetro λ): $f_X(x) = \lambda\exp(-\lambda x)$, e $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$, $V[X] = 1/\lambda^2$.
Uma variável multidimensional $[X_1,\ldots,X_n]$ discreta é descrita por sua **distribuição** $\mathbb{P}(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n)$. A distribuição marginal de X_1 é $\mathbb{P}(X_1 = x_1) = \sum_{x_2}\cdots\sum_{x_n}\mathbb{P}(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n)$. As variáveis são **independentes** se e somente se $\mathbb{P}(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$. Para variáveis discretas, a distribuição **condicional** de X dado Y é $\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)/\mathbb{P}(Y = y)$; temos também $\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i|Y = y)$.
Uma variável multidimensional $[X_1,\ldots,X_n]$ contínua é descrita por sua **densidade** $f(x_1,\ldots,x_n)$ (uma densidade é uma função maior ou igual a 0, e cuja integral no espaço inteiro é 1). Dada a densidade $f(x_1,\ldots,x_n)$, a probabilidade $\mathbb{P}([X_1,\ldots,X_n] \in A)$, para um evento em $\Re^n$, é a integral $\int\ldots\int_A f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$. A densidade marginal de X_1 é $f_{X_1}(x_1) = \int\ldots\int f(x_1,\ldots,x_n)dx_2\ldots dx_n$ (ou seja, integral em todas as outras coordenadas; para duas variáveis X e Y, temos $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$). A **função de distribuição cumulativa** $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$ é igual a $\mathbb{P}(X_1 \leq x_1,\ldots,X_n \leq x_n)$. Para X e Y, temos $f(x,y) = \partial^2 F_{X,Y}(x,y)/\partial x\partial y$. Variáveis contínuas são **independentes** se e somente se $f(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$ (equivalente a $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$). A **densidade condicional** de X dado Y é $f(x|y) = f(x,y)/f_Y(y)$, e a **esperança condicional** de X dado Y é $\mathbb{E}[X|Y = y] = \int x f(x|y)dx$.
Para duas variáveis (discretas ou contínuas), a **covariância** de X e Y é $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ e o **coeficiente de correlação** de X e Y é $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)/(\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]})$.
Se X é $N(\mu,\sigma^2)$ e $Y = aX + b$ com $a \neq 0$, então Y é $N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$. Se X é $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ e Y é $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, e X e Y são independentes, então $W = X + Y$ é $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ e $Z = X - Y$ é $N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
Teorema do Limite Central: Seja $X_1,X_2,\ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $V[X_i] = \sigma^2$, e seja $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Então $Z_n = (S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ tem uma função de distribuição cumulativa que converge para a função de distribuição cumulativa da distribuição normal padrão.

SOLUÇÃO

0303200 – Probabilidades **Turma:** **Prof:** **REC, 2019**

Nome (completo): No.USP:

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

1) Use caneta azul ou preta para marcar as caixas e preencha a caixa totalmente para correta interpretação. Exemplo: ■. **Não use ☒.**
2) Insira seu número USP nas caixas ao lado. **Note que há espaço para 8 dígitos!** Caso seu número USP tenha 7 dígitos, considere 0 como o primeiro dígito à esquerda. Por exemplo, se seu número USP fosse 1234567, você preencheria:

0 1 2 3 4 5 6 7

3) A prova tem duração de 100 minutos; não haverá tempo adicional.
4) O aluno deve comprovar sua identidade com documento oficial.
5) Alunos só podem sair da sala de prova 60 minutos após o início da prova.
6) Não é permitido o uso de calculadoras.
7) Não é permitido o uso de telefones celulares ou equipamentos móveis similares. Esses equipamentos devem ser colocados na frente da sala.
8) No topo de cada folha você encontra três números no formato +X/Y/Z+. O número X é o número da sua prova; ele tem que ser o mesmo em todas as folhas da sua prova.

Respostas dos testes:

Atenção: respostas devem ser indicadas nesta folha!

Teste 1: A B C ■ E
Teste 2: A B ■ D E
Teste 3: A ■ C D E
Teste 4: A B C D ■
Teste 5: ■ B C D E
Teste 6: A B ■ D E
Teste 7: ■ B C D E
Teste 8: A ■ C D E
Teste 9: ■ B C D E
Teste 10: A B C ■ E
Teste 11: ■ B C D E
Teste 12: A B ■ D E
Teste 13: A ■ C D E
Teste 14: A ■ C D E
Teste 15: A B C D ■
Teste 16: A B C ■ E

Distribuição Normal P(0≤Z<z0)

z0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990