Física III - 4323203

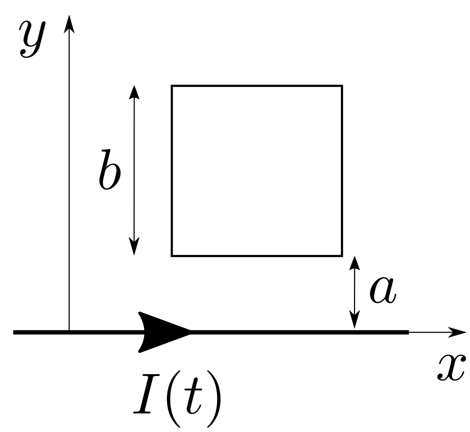
Escola Politécnica - 2019

GABARITO DA P3

13 de junho de 2019

Questão 1

Considere um fio infinito transportando uma corrente elétrica $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ ao longo do eixo x e uma espira quadrada de b, conforme indicado na figura abaixo. De acordo com a lei de Biot-Savart, módulo do campo magnético produzido pelo fio infinito é dado por $B(r) = \mu_0 I/(2\pi r)$. O fluxo ϕ_m do campo magnético do fio através da espira é dado por $\phi_m = CI(t)$, sendo C uma constante.



(a) (0,5 ponto) Obtenha a indutância mútua do sistema fio-espira em termos de C.

(b) (1,0 ponto) Calcule a integral de linha $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo da espira.

(c) (1,5 ponto) Calcule o fluxo magnético ϕ_m e a constante C em termos de a, b, μ_0.

(d) (1,0 ponto) Supondo que a espira tenha resistência R, determine a corrente induzida na espira e seu sentido no intervalo $0 < t < \pi/\omega$.

Solução da questão 1

(a) O fluxo magnético ϕ_m relaciona-se com a corrente elétrica por meio da expressão $\phi_m = M_{\text{espira}-\text{fio}} I_{\text{fio}}(t)$. Comparando com $\phi_m = CI(t)$, obtemos $\boxed{M_{\text{espira}-\text{fio}} = C}$.

(b) De acordo com a lei de Faraday $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \phi_m}{\partial t}$, de forma que $\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = C\omega I_0 \sin(\omega t)}$.

(c) O fluxo magnético é calculado a partir da expressão $\phi_m = \int \vec{B}.d\vec{A}$, onde neste caso o elemento de área infinitesimal é dado por $d\vec{A} = bdy\vec{k}$. Como o campo magnético produzido pelo fio varia ao longo da direção y, temos

$$\phi_m = \frac{\mu_0 I(t) b}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 I(t) b}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a},$$

de onde encontramos $\boxed{C = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}}$.

(d) Utilizando o resultado do item (b) obtemos a corrente induzida é dada por $I_{ind} = \epsilon/R$, onde $\epsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$. Temos então $\boxed{I_{ind} = [\frac{\mu_0 b \omega I_0}{2\pi R} \ln \frac{a+b}{a}] \sin(\omega t)}$. De acordo com a Lei de Lenz, seu sentido será anti-horário para $0 < t < \pi/\omega$.

Questão 2

Em uma região do espaço com campo magnético $\vec{B}$ da forma $\vec{B}(x, y) = (\alpha y + \beta x)\vec{i}$, onde α e β são duas constantes. Existe também um campo elétrico $\vec{E}(t)$ com valor inicial $\vec{E}(0) = \vec{E}_0$ uniforme. Usando as equações de Maxwell na forma diferencial e assumindo que o vetor densidade de corrente $\vec{J}$ seja nulo, determine:

(a) (0,5 ponto) A constante β.

(b) (1,0 ponto) O vetor campo elétrico $\vec{E}(t)$.

(c) (0,5 ponto) A densidade de carga do sistema.

(d) (1,0 ponto) Qual das equações de Maxwell não foi utilizada ainda? Verifique que tal equação é satisfeita.

Solução da questão 2

(a) Da Lei de Gauss para o magnetismo $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, obtemos por diferenciação que $\boxed{\beta = 0.}$.

(b) Tendo em vista a Lei de Àmpére-Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, onde $\vec{J} = 0$, obtemos que $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = (0, 0, -\alpha)$. Integrando a relação acima, obtemos $\boxed{\vec{E}(t) = \vec{E}_0 - \dfrac{\alpha t}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{k}}$.

(c) A densidade de carga ρ é obtida a partir da Lei de Gauss na forma diferencial $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Utilizando o resultado obtido no item (b) segue, por diferenciação, que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ e portanto $\boxed{\rho = 0}$.

(d) A lei de Faraday ainda não foi utilizada. A partir da relação $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, segue que cada componente dos lados esquerdo e direito da expressão acima são dados por $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = (0, 0, 0)$ e $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) = (0, 0, 0)$. Portanto, a Lei de Faraday é satisfeita.

Questão 3

O campo elétrico de uma onda eletromagnética no vácuo é dado por

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \operatorname{sen}(\alpha x) \cos(\beta t) \vec{j},$$

onde α e β são duas constante <u>positivas</u> dadas. Expresse suas respostas utilizando a velocidade da luz no vácuo c.

(a) (1,0 ponto) Deduza a relação existente entre as constantes α e β sabendo-se que o campo elétrico satisfaz a equação de onda.

(b) (1,0 ponto) A partir da lei de Faraday, deduza a expressão do campo magnético da onda.

(c) (1,0 ponto) Reescreva $\vec{E}(x,t)$ na forma de uma superposição de ondas que se compõem para produzir esta onda estacionária.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(a) Usando a expressão de $\vec{E}$ obtemos

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -\alpha^2 E_0 \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta t)\vec{j},$$

e

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\beta^2 E_0 \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta t)\vec{j}.$$

Substituindo na equação de ondas obtemos

$$\alpha^2 = \frac{\beta^2}{c^2}. \quad \text{Logo,} \quad \beta = \alpha c.$$

(b) A lei de Faraday fornece

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{k}\frac{\partial}{\partial x}E_0 \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta t) = -E_0\alpha\cos(\alpha x)\cos(\beta t)\vec{k}.$$

Integrando em t obtemos

$$\vec{B} = -E_0\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\cos(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta t)\vec{k} = -\left(\frac{E_0}{c}\right)\cos(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta t)\vec{k}$$

(c) Usando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}(B) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

podemos reescrever $\vec{E}$ como uma superposição de duas ondas se propagando ao longo da direção x, em sentidos opostos.

$$\vec{E}(x,t) = E_0\operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta t)\vec{j} = \frac{E_0}{2}\operatorname{sen}(\alpha x - \beta t)\vec{j} + \frac{E_0}{2}\operatorname{sen}(\alpha x + \beta t)\vec{j}$$

Formulário

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \Phi^{total} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = M_{21}I_1 = MI_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \ \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \ \mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\hat{j}, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\hat{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = < S > = \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$< \cos^2(kx-\omega t+\phi) > = < \operatorname{sen}^2(kx-\omega t+\phi) > = 1/2, \quad < \cos(kx-\omega t+\phi)\operatorname{sen}(kx-\omega t+\phi) > = 0,$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad \cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$\sin A + \sin B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$