Rd 1900

Resumo de Física IV Para P1

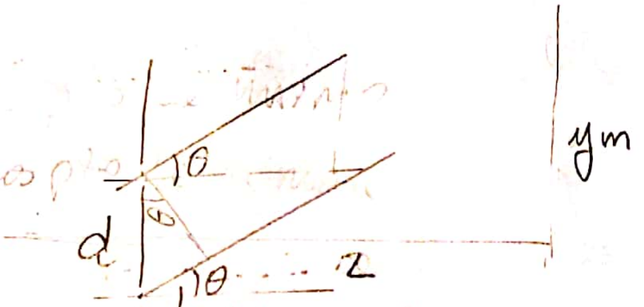
Autor: Fujita

Contatos: (11) 97436-5932

• $\Delta d = \begin{cases} m\lambda \to \text{construtiva} \\ (m+1/2)\lambda \to \text{destrutiva} \end{cases}$

$\Updownarrow$

• $k\Delta d = \Delta\phi = \begin{cases} 2m\pi \Rightarrow \text{construtiva} \\ (2m+1)\pi \Rightarrow \text{destrutiva} \end{cases}$



↳ $\Delta d = d\sin\theta$

$\frac{y_m}{L} = \tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta$

• DIFRAÇÃO EM FENDA SIMPLES

- Pontos de mínimo tq

$a\sin(\theta) = m\lambda$ (θ → incógnita)

↳ abertura

- Pontos de máximo tq média aritmética entre mínimos. $(\theta_{MAX} \approx \frac{\theta_1+\theta_2}{2})$

FENDA DUPLA

temos fenômenos de difração e interf.
a envoltória é causada pela difração
os batimentos pela interferência

Envol: $a\sin\theta = m\lambda$ (mínimo)
batim: $d\sin\theta = m\lambda$ (máximo)

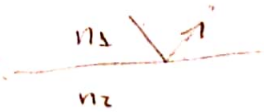
• $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\phi)$ mas se $A_1 = A_2 \Rightarrow A^2 = 2A_0^2 + 2A_0^2\cos(\Delta\phi)$

se $\cos\Delta\phi = 2\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 1 \Rightarrow A^2 = 4A_0^2\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$

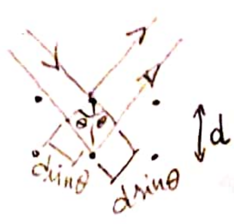
como $I \propto A^2 \Rightarrow I = 4I_0\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$

• $\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$ $\therefore$ $n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0 \cancel{f}}{\lambda_n \cancel{f}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_n}$

• mudança de fase ($+\pi$) se $n_1 < n_2$



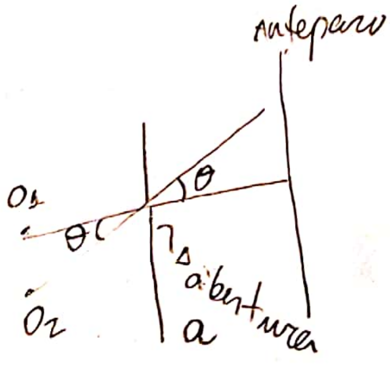
• em cristais, $\Delta d = 2d\sin\theta$ e se quisermos máximos, usamos a Lei de Bragg: $2d\sin\theta = m\lambda$



• Difração em orifícios circulares de diâmetro D

O primeiro mínimo de difração em uma fenda circular ocorrerá em

$$\sin\theta = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}$$



• Critério de Rayleigh

para resolvermos dois objetos

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a} \quad \text{ou} \quad \theta \simeq \frac{\lambda}{a}$$

• Para telescópios circulares usamos o limite

$$\theta_{min} \simeq 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \Delta l = l_0 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Sumário

Contato:

(11) 97436-5932

http://fb.com/matfuji

P1 - 2018

Física IV

Por: Fujita

Óptica Física

Antes de tudo, olá novamente! No ensino médio, foi estudado o conceito de óptica geométrica, que usava geometria para descrever o comportamento da luz.

Em física III, vimos que a luz pode ser interpretada como onda eletromagnética. O que vamos ver agora é o estudo de fenômenos ondulatórios em luz (em particular, a interferência e difração).

Vamos, então, viajar nesse crossover de Física II e III.

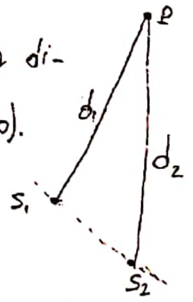
Interferência

Em ondulatória, a interferência é um fenômeno de superposição de 2 ou mais ondas em um mesmo lugar no espaço.

Para seu estudo, vamos considerar que as ondas vêm de fontes coerentes, isto é, a diferença de fase é constante no tempo. Além disso, elas terão mesmo comprimento de onda λ.

- Diferença de Caminho no espaço

A diferença de caminho é dada pela diferença de distâncias percorridas (em módulo).



Suponha que exista duas fontes (S_1 e S_2). Caso a gente queira analisar a interferência no ponto P, calculamos as distâncias percorridas (d_1 e d_2) por cada onda.

$$\Delta d = |d_2 - d_1|$$

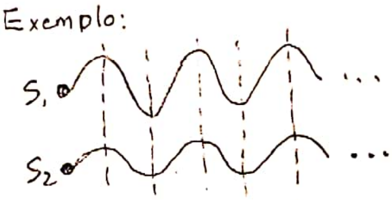
Depois disso, basta aplicar $\Delta d = |d_2 - d_1|$. A partir dela, podemos deduzir o que vai acontecer.

- Fontes em fase

Duas fontes estarão em fase quando a diferença de fase entre elas é 0.

Isso quer dizer que às cristas e vales das duas ondas se encontram, quando colocadas lado a lado.

Exemplo:

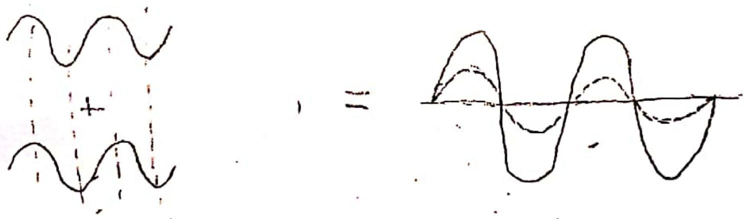


Obs: A amplitude não precisa ser a mesma.

- Interferência Construtiva

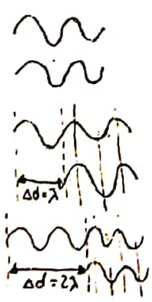
Quando a interferencia é construtiva, a amplitude da onda resultante é maior do que inicialmente.

Para que isso ocorra, consideramos que as cristas e vales devem se encontrar no ponto de interferência construtiva, como no caso da fonte em fase.



Ondas pequenininhas   onda Jumbo

Quando as fontes estão em fase, isso ocorre quando a diferença de caminho é múltiplo de λ:



- $\Delta d = 0$
- $\Delta d = \lambda$
- $\Delta d = 2\lambda$

Isso ocorre porque às cristas e vales devem se encontrar para a interferência construtiva.

Por isso, para interferência construtiva de fontes em fase é:

$$\boxed{\Delta d = m\lambda}$$

Com m inteiro e positivo $(0, 1, 2, \ldots)$

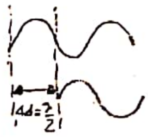
• Interferência Destrutiva

De forma oposta ao caso anterior, a interferência é dita destrutiva quando a amplitude resultante é menor do que inicialmente.

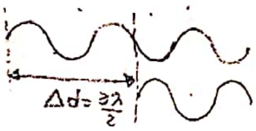
Isso ocorre quando a crista de uma das ondas encontra o vale da outra, e vice e versa. Pelo princípio da superposição, isso "anula" as ondas no ponto de interferência destrutiva.

Ondas Pequenininhas — Onda "anulada"

Quando as fontes estiverem em fase, isso vai ocorrer quando a diferença de caminho for múltiplo ímpar de $\frac{\lambda}{2}$ (não inteiro).

• 

$\Delta d = \frac{\lambda}{2}$

• 

$\Delta d = \frac{3\lambda}{2}$

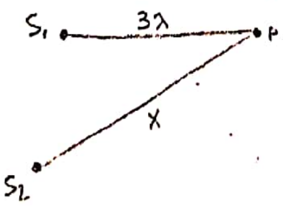
Se as fontes estiverem em fase a interferência destrutiva ocorre para:

$$\boxed{\Delta d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda}$$

Para m inteiro positivo $(0, 1, 2, \dots)$

Exemplo:

Duas fontes S_1 e S_2 emitem ondas em fase com comprimento de onda λ. No ponto P da figura ocorre interferência destrutiva. Para isso acontecer, qual deve ser a distância x mínima?



Obs: Considere $x > 3\lambda$

$$|x - 3\lambda| = (2m+1)\lambda$$

$(m + 1/2)\lambda$ $x - 3\lambda$

$\lambda =$

3

$x = 4\lambda$

"Solução"

Para ocorrência de mínimo (interferência destrutiva), devemos ter:

$$\Delta d = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda \quad \text{com } m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Visto que as fontes estão em fase. Lembrando que $\Delta d = |d_2 - d_1|$, vamos aplicar o primeiro mínimo com $m = 0$:

$$|x - 3\lambda| = \frac{\lambda}{2}$$

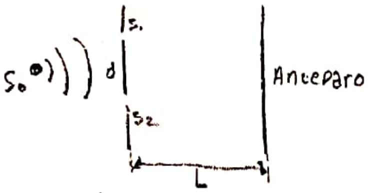
Como $x > 3\lambda$, temos:

$$\boxed{x = \frac{7\lambda}{2}}$$

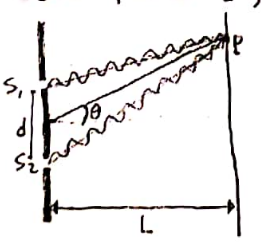
- Dupla Fenda

O experimento que demonstrou que a luz é uma onda foi o experimento de dupla fenda de Young.

Por enquanto, vamos entender o que ocorre nesse modelo em termos de interferência. O experimento consiste em um feixe de luz coerente vindo de S_0. O feixe incide em duas fendas S_1 e S_2, distanciadas em d:

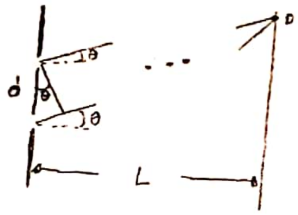


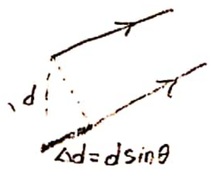
Na nossa análise, S_1 e S_2 vão servir de fontes coerentes em fase. O anteparo da figura é onde será analisado o padrão de interferência. Em cada ponto P, vamos analisar a interferência. Para isso observe a figura ao lado.



Aqui!

Para simplificar nossa vida, vamos ver o caso quando $L \gg d$. Quando isso acontece, os raios de S_1 e S_2 são aproximadamente <u>paralelos</u>, e o ângulo θ é pequeno, valendo $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$:





Para os raios aproximadamente paralelos, vale que a diferença de caminho é $\Delta d = d\sin\theta$.

Para <u>interferência construtiva</u>, dizemos que:

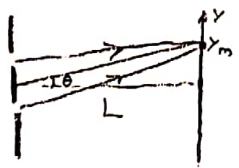
$$\boxed{d\sin\theta = m\lambda} \quad \text{para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Que é o caso de interferência de fontes em fase. Adicionamos os inteiros negativos em m, pois o ângulo θ pode ser negativo.

Já para <u>interferência destrutiva</u>, dizemos que:

$$\boxed{d\sin\theta = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda} \quad \text{para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Para determinar a posição dos máximos, usamos a aproximação de pequenos ângulos: $\sin\theta \approx \tan\theta$



$$\sin\theta \approx \frac{y_m}{L}$$

Agora é hora da verdade! Vamos aplicar tudo isso em um exercício de prova!

P1 - 2017

(1) (1,0 ponto) Numa experiência de Young, duas fendas separadas por uma distância de $d = 1{,}5$ mm são iluminadas com luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ m. Observam-se franjas de interferência num anteparo distante de $L = 3$ m do plano das fendas. Determine, em metros, o espaçamento entre estas franjas. Despreze efeitos de difração e lembre que para ângulos pequenos, $\text{sen}\,\theta \approx \tan\theta$.

"Solução:"

Os exercícios da prova de física IV costumam ser numéricos. Quando for o caso, recomendo calcular a expressão com letras genéricas e só no final aplicar valores.

Para calcular o espaçamento entre as franjas, podemos calcular a distância (usando $\sin\theta \approx \frac{y_m}{L}$) entre dois pontos de máximos consecutivos ou mínimos consecutivos (tanto faz).

Os máximos ocorrem em:

$$d \sin\theta = m\lambda \quad \text{, para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

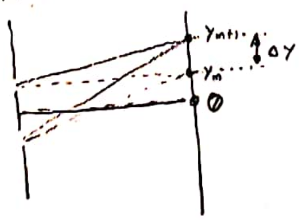
A diferença entre 2 máximos genéricos m e $m+1$ e usando $\sin\theta_m \approx \frac{y_m}{L}$ e $\sin\theta_{m+1} \approx \frac{y_{m+1}}{L}$, temos:

$$\begin{cases} \frac{d\,y_{m+1}}{L} = (m+1)\lambda \\ \frac{d\,y_m}{L} = m\lambda \end{cases} \ominus \Rightarrow \frac{d}{L}\underbrace{(y_{m+1} - y_m)}_{\substack{\text{Espaçamento} \\ \Delta y}} = \lambda \qquad \frac{d\Delta y}{L} = \lambda$$

O espaçamento será, então:

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d} \Rightarrow \Delta y = \frac{6 \cdot 10^{-7} \cdot 3}{1{,}5 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\Delta y = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}$$

Desenho:



#

6

Intensidade de Interferência

Para falarmos de intensidade, vamos lembrar da fórmula de amplitude da interferência:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\phi)$$

Em que A é a amplitude resultante, A_1 e A_2 são as amplitudes das duas ondas sobrepostas e $\Delta\phi$ é a diferença de fase (será discutido melhor no próximo tópico).

Para ondas de mesma amplitude A_1, temos:

$$A^2 = 2A_1^2(1+\cos\Delta\phi)$$

Podemos trocar $\cos\Delta\phi = 2\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) - 1$ (Arco duplo), ficando com:

$$A^2 = 4A_1^2\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

Vamos lembrar que a intensidade de uma onda é proporcional à amplitude ao quadrado ($I \propto A$). Vamos chamar I de intensidade resultante da interferência; I_1 de intensidade de uma das ondas e $I_0 = 4I_1$. Temos, então:

$$\boxed{I = I_0\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{I = 4I_1\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$

Isso quer dizer que a intensidade da onda vai variar de $0 \leq I \leq 1$. O mínimo ocorrerá quando $\Delta\phi$ for múltiplo ímpar de π, e o máximo, quando $\Delta\phi$ for múltiplo par de π.

Mínimo: $\Delta\phi = (2m+1)\pi$, para $m \in \mathbb{Z}$

Máximo: $\Delta\phi = 2m\pi$, para $m \in \mathbb{Z}$

- Diferença de fase ($\Delta\phi$)

Em ondas harmônicas, vimos que a onda era descrita por $f(x,t) = A\cos(\underbrace{kx \pm \omega t + \delta}_{\phi(x,t)})$, com $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e $\omega = 2\pi f$.

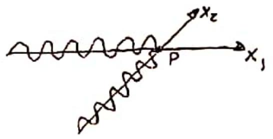
O que tá dentro dos parênteses é chamado de <u>fase</u>. A diferença de fase de duas ondas descritas por:

$$f_1(x,t) = A_1\cos(\underbrace{kx_1 \pm \omega t + \delta_1}_{\phi_1}) \qquad f_2(x,t) = A_2\cos(\underbrace{kx_2 \pm \omega t + \delta_2}_{\phi_2})$$

É dada por:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = k(x_2 - x_1) + \Delta\delta.$$

Repare que $x_2 - x_1$ é a diferença de caminho Δd:



$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta d + \Delta\delta.$$

Então veja que a gente consegue calcular a intensidade apenas usando a diferença de fase!

Um exemplo é quando as ondas estão em fase e $\Delta\delta = 0$. Vamos analisar os pontos de máximo e mínimo (Interferência construtiva e destrutiva, respectivamente):

- Máximo: $\Delta\phi = 2m\pi$ e $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta d \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\Delta d = 2m\pi \therefore \boxed{\Delta d = m\lambda}$
- Mínimo: $\Delta\phi = (2m+1)\pi$ e $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta d \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\Delta d = (2m+1)\pi \therefore \boxed{\Delta d = (m+\frac{1}{2})\lambda}$

Chegando nos mesmos resultados das páginas 2 e 3 desse resumo.

¯_(ツ)_/¯

Funcionou!

• Películas Finas

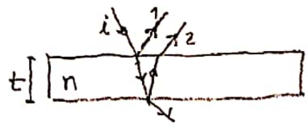
Outro tipo de questão que cai em prova (de interferência) é sobre película fina.

A película fina é uma pequena camada de um material imerso em um meio com índice de refração diferente do seu:

• d muito pequeno

Lembrando que $\boxed{n_m = \frac{c}{v_m}}$ e $n \geq 1$ sempre!

Na análise de interferência de películas finas, ocorrerá reflexão e refração de um feixe:



Para o caso de pequenas espessuras, a diferença de caminho é aproximadamente $2t$ (ida e volta do raio 2).

Na análise, devemos tomar um pequeno cuidado. O comprimento de onda λ_n que será usado é o do meio n. Lembrando que a refração ocorre com frequência constante e que $v = \lambda f$, temos:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0 f}{\lambda_n f} \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}}$$

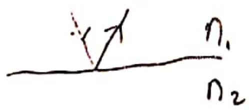
$\lambda_n \rightarrow$ Comprimento de onda do meio.

$\lambda_0 \rightarrow$ Comprimento de onda no vácuo.

Além disso, temos a regra da reflexão. Na reflexão de um meio n_1 para n_2, temos:

• Se $n_1 > n_2$, não há mudança de fase, e a diferença de fase será simplesmente $\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0}\right) \cdot 2t = \Delta\phi$

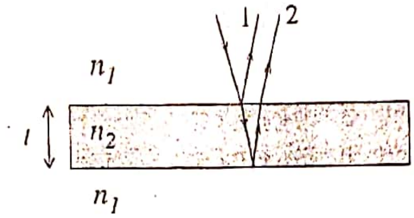
• Se $n_1 < n_2$, haverá mudança de fase, e devemos somar π na fase da onda que sofre reflexão (para cada ocorrência).



Vamos ver um exemplo, para tudo ficar mais claro.

P1 - 2017

(I) Um filme fino de espessura t variável e índice de refração n_2 é iluminado por luz monocromática de comprimento de onda que no vácuo é igual a λ_0. O filme encontra-se imerso em um meio cujo índice de refração $n_1 < n_2$. Observa-se a interferência dos raios 1 e 2 provenientes da reflexão da luz nas superfícies superior e inferior do filme, conforme a figura. Considere incidência normal.



(a) (1,0 ponto) Calcule o valor a mínimo da espessura do filme para que a intensidade da luz observada seja máxima.

(b) (0,5 ponto) Calcule o valor b mínimo da espessura do filme para que a intensidade da luz observada seja mínima.

Solução:

Vamos analisar o caminho de cada raio e ver se devemos somar π em algum lugar:

Raio 1:

- reflexão de 1 para 2. Como $n_2 > n_1$, devemos somar π.

Raio 2:

- Refração de 1 em 2 $\rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n_2}$
- Reflexão de 2 para 1. Como $n_2 > n_1$, não soma nada
- Refração de 2 em 1 seguido de encontro com 1.

Nesse caso, a diferença de fase vai ser:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta d + \pi \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi n_2}{\lambda_0}\cdot 2t + \pi$$

Da reflexão de 1.

a) Para máximo, devemos ter $\Delta\phi = 2m\pi$, com $m = 0, \pm1, \pm2, \dots$

Nesse caso:

$$\frac{2\pi n_2}{\lambda_0}\cdot 2t + \pi = 2m\pi \Rightarrow \frac{4 n_2 t}{\lambda_0} = (2m-1)$$

Para mínimo: $m = 1$. Assim: $\boxed{t_{max} = \frac{\lambda_0}{4n_2}}$

10

b) Para mínimo, devemos ter $\Delta\phi = (2m+1)\pi$, com $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$
Assim:

$$\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \cdot 2t + \pi = (2m+1)\pi \Rightarrow \frac{4 n_2 t}{\lambda_0} = 2m$$

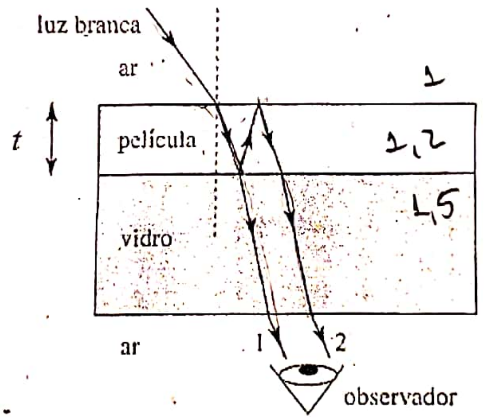
Poderíamos colocar $m=0$ e dizer que $t_{min} = 0$, mas isso seria abusar da boa vontade da física. Vamos aplicar $m=1$:

$$\frac{4 n_2 t}{\lambda_0} = 2 \quad \therefore \quad \boxed{t_{min} = \frac{\lambda_0}{2 n_2}} \quad \#$$

Obs: Na resolução oficial, o IF subtraiu π, no lugar de somar. A verdade é que ~~foda-se~~ tanto faz.

P1 - 2016

(II) (1,5 ponto) Uma película transparente de espessura $t = 200$ nm e com índice de refração $n_p = 1{,}2$ está colocada entre dois meios dielétricos: ar (índice de refração $n_{ar} = 1$) e vidro (índice de refração $n_v = 1{,}5$). Luz branca incide quase normalmente sobre esta película e um observador vê a luz transmitida, conforme a figura. A luz branca tem comprimentos de onda entre 400 nm e 700 nm. Para quais comprimentos de onda neste intervalo haverá interferência construtiva entre os raios 1 e 2 da figura?



(Resolução na próxima página)

"Solução:"

Veja que é um exercício que pede vários comprimentos de onda. Vamos analisar a rota de cada raio 1 e 2:

Raio 1:

- Refração do ar para a película: nada
- Refração da película para o vidro: nada
- Refração do vidro para o ar: nada

Raio 2:

- Refração do ar para a película: $\lambda = \frac{\lambda_0}{1,2}$
- Reflexão de película no vidro: como $n_v > n_p$, há inversão de fase $(+\pi)$
- Reflexão de película no ar: como $n_A < n_p$, não há inversão.
- Refrações: nada

Outra forma de pensar na diferença de caminho é olhando para o local onde ocorre os eventos diferentes (no caso, a película).

Dentro da película, o raio 1 percorre $d_1 = t$ e o raio 2 percorre $d_2 = 3t$ (ida, volta e ida de novo).

Por isso $\Delta d = 3t - t = 2t$

Ele quer saber de interferência construtiva. Por isso, usamos a relação de máximos da diferença de fase:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta d + \pi = 2m\pi \quad ; \text{com} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

A diferença de caminho ocorre na película. Por isso usamos $\lambda = \frac{\lambda_0}{n_p}$:

$$\frac{4 n_p \pi t}{\lambda_0} + \pi = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \frac{4 n_p t}{2m - 1}$$

E o exercício pede os comprimentos de onda entre $400 \leq \lambda_0 \leq 700$ nanômetros. Vamos aplicar alguns valores de m e ver o que acontece

$$\lambda_0 = \frac{4 n_p t}{2m-1} = \frac{960}{2m-1} \text{ (nm)} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 960 \text{ nm} & (m=1) \\ \lambda_0 = 320 \text{ nm} & (m=2) \\ \lambda_0 = 192 \text{ nm} & (m=3) \\ \cdots \text{ (Fica menor)} \end{cases}$$

Veja que não há comprimentos de onda dentro do intervalo especificado. E essa é a resposta! ※

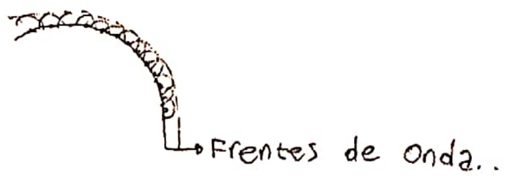
Difração

A difração é um fenômeno que ocorre da interferência da onda com ela mesma. Vamos ver agora um pouco os princípios e equações por trás disso.

- Princípio de Huygens

Esse princípio nos diz que os pontos de uma frente de onda podem ser considerados fontes secundárias de onda com a mesma velocidade de propagação.

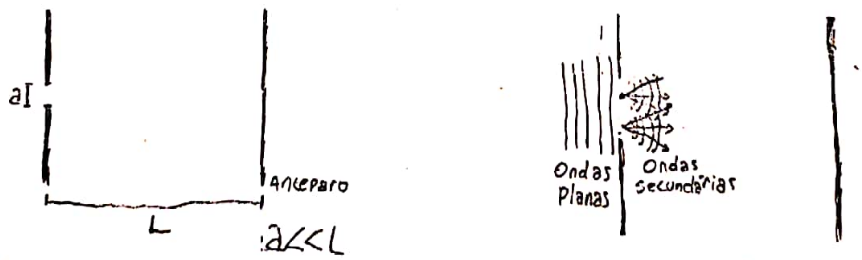
Exemplo:



- Difração em Fenda Simples

O estudo da difração vai ser feito com fendas simples de largura a. Quando ela possui valores comparáveis ao comprimento de onda, a luz que passa por ela difrata.

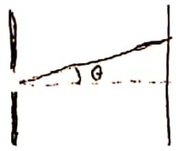
A ideia da difração é cada ponto da frente de onda quando ela chega na fenda se torna uma fonte pontual, de acordo com o princípio de Huygens.



As ondas secundárias, quando chegarem ao anteparo, irão interferir entre si, gerando pontos de máximos e mínimos.

Para esse curso, estudamos o caso em que $L \ll a$. Com isso, podemos aproximar os raios das fontes secundárias como <u>paralelos</u>.

A gente consegue calcular os pontos de <u>mínimo</u> da difração em fenda simples. Ela é dada em função do ângulo θ abaixo:



Mínimos:

$$\boxed{a \sin\theta = m\lambda}$$

com $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Um cuidado que devemos ter é o de não aplicar $m=0$ na equação acima. Em $\theta = 0$, temos a maior intensidade, que veremos depois.

Os pontos de máximo são um pouquinho menos intuitivos de encontrar. O que acabamos fazendo é aproximar o ângulo de máximo é a média dos ângulos de mínimos adjacentes.

$$\theta_{max} \approx \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

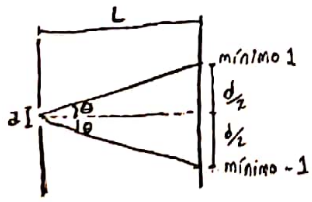
P1 - 2017

(II) (1.5 ponto) Em um outro experimento, as duas fendas do item (a) são substituídas por uma <u>única</u> fenda de largura $a = 2 \times 10^{-4}$ m. Determine, em metros, a largura do máximo central da figura de difração observada no anteparo.

<u>Sugestão:</u> substitua os valores numéricos apenas na resposta final.

Obs: veja o resto do enunciado na página 6.

\\\\ <u>Solução:</u> //



A largura do máximo central é dada pela distância entre os dois mínimos adjacentes. Então:

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{a}$$

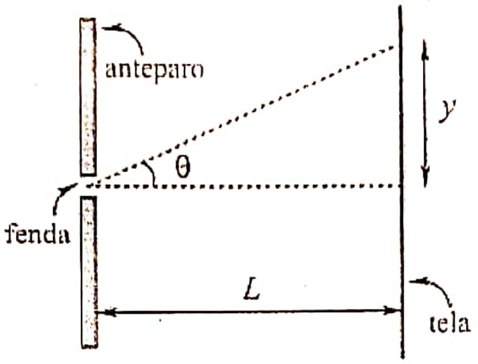
Usando $\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{d}{2L}$ e colocando $m=1$:

$$\frac{d}{2L} \approx \frac{\lambda}{a} \Rightarrow d = \frac{2\lambda L}{a} \therefore \boxed{d = 1{,}8 \cdot 10^{-2}\, m}$$

#

P1 - 2015

Luz de comprimento de onda de 500 nm de uma fonte pontual distante incide normalmente sobre um anteparo com uma fenda de largura $a = 5000$ nm. O *padrão de difração* é observado numa tela a uma distância $L = 3$ m do anteparo.



(a) (1.0 ponto) Calcule a posição angular do primeiro e do segundo mínimos de difração com $\theta > 0$ (use a aproximação $\text{sen}\theta \approx \text{tg}\theta \approx \theta$).

(b) (0.5 ponto) Calcule a distância $y > 0$ do primeiro máximo lateral de difração em relação ao centro da figura de difração (veja a figura 1). Use a aproximação de que um máximo lateral está situado à meia distância dos mínimos adjacentes.

\\\\Solução://

a) De novo, usaremos $\sin\theta \approx \theta$. E, de novo, usaremos o mínimo da difração:

$$a \sin\theta = m\lambda \quad (m = \pm1, \pm2, \pm3, \cdots)$$

A posição angular pode ser calculada usando $\sin\theta \approx \theta$:

$$\theta = \frac{m\lambda}{a}$$

O primeiro e segundo mínimo são dados por $m=1$ e $m=2$:

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \boxed{\theta_1 = 0{,}1 \text{ rad}}$$

$$\theta_2 = \frac{2\lambda}{a} \Rightarrow \boxed{\theta_2 = 0{,}2 \text{ rad}}$$

b) Sinceramente, esse item b. tem tanta aproximação que eu nem sei se a resposta bate com a realidade. Mas bora lá!

Aqui devemos usar $\tan\theta \simeq \theta = \frac{y}{L}$

- O primeiro ponto de mínimo possui $y_1 = \theta_1 L \Rightarrow y_1 = 0{,}3\,m$
- O segundo ponto de mínimo possui $y_2 = \theta_2 L \Rightarrow y_2 = 0{,}6\,m$

O ponto de máximo tá no meio deles. (De acordo com o enunciado):

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow \boxed{y = 0{,}45\,m}$$

Ou:

$$\theta_{max} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \Rightarrow \tan\theta_{max} \approx \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{2} \Rightarrow y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \#$$

- Intensidade na Difração

O cálculo da intensidade da difração vem da sobreposição de cada fonte secundária do Princípio de Huygens.

O resultado final fica em função de uma variável β em função de θ $\left(\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta\right)$. Temos, então:

$$\boxed{I = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\frac{\beta}{2}}\right]^2}, \text{ com } \beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$$

Veja que os pontos de mínimo ocorrem quando $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0$, ou seja, $\beta = 2m\pi$. Assim:

mínimo: $\frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta = 2m\pi \Rightarrow \boxed{a \sin\theta = m\lambda}$ com $m = \pm1, \pm2, \pm3 \ldots$

Chegando na mesma relação que a gente viu anteriormente.

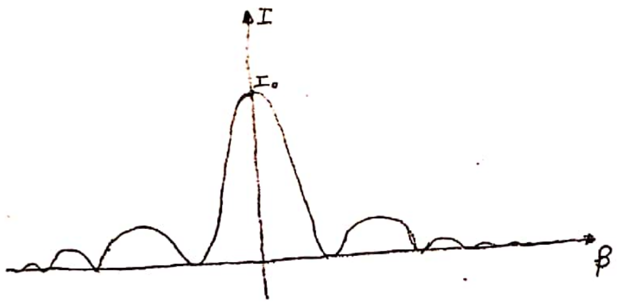
Outra análise interessante é quando $\beta = 0$. A função, em si, não está definida em $\beta = 0$, mas seu limite $\lim_{\beta \to 0} I(\beta) = I_0$.

Na verdade, I_0 é o valor da intensidade no máximo central, a função mesmo foi construída levando isso em conta. Então na verdade:

$$I(\beta) = \begin{cases} I_0 \text{ , se } \beta = 0 \\ I_0\left[\dfrac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\frac{\beta}{2}}\right]^2 \text{ , se } \beta \neq 0 \end{cases}$$

Veja que é difícil definir os pontos de máximo dessa função, pois precisaríamos derivar, igualar a zero, e tudo mais...

Por fim, vamos ver o comportamento da luz no anteparo. O gráfico dessa função é esboçado a seguir



Esse gráfico mostra que a intensidade oscila e reduz quanto maior for o valor absoluto de β. Além disso, o máximo central é o maior e mais largo máximo da difração.

Fazer contas com essa fórmula é bizarro. Felizmente, o uso direto dela é raro em provas.

- <u>Dupla Fenda</u>

Déjà Vu ?

Sim, vamos falar de dupla Fenda de Young de novo. Antes, tínhamos desconsiderado os efeitos de <u>difração</u> nas fendas

A ideia é justamente juntar os dois fenômenos numa fórmula de intensidade só, dada por:

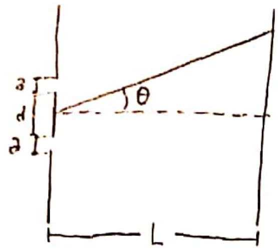
$$I = I_0 \underbrace{\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}_{\text{Parcela da Interferência}} \underbrace{\left[\frac{\sin(\beta/2)}{\frac{\beta}{2}}\right]^2}_{\text{Parcela da Difração}}$$

com:

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$

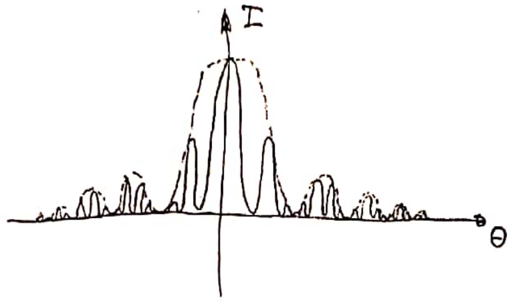
$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$

Lembrando que o experimento era:



A fórmula é meio bizarra, mas ela é só a parcela de difração misturada com a parcela de interferência vista antes.

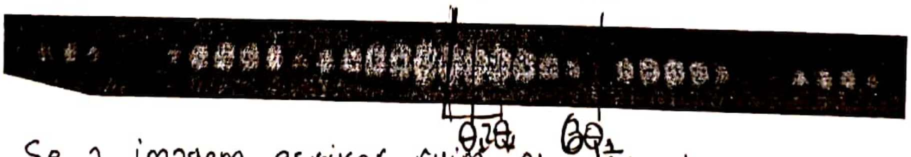
O gráfico dessa função é um cosseno quadrado oscilando em uma envoltória de difração:



A ideia dos exercícios é justamente misturar difração e interferência. Vamos ver alguns exemplos.

P1 – 2016

(I) (1.0 ponto) Luz monocromática incide sobre um anteparo com duas fendas de largura a e separadas por uma distância d. Sobre uma tela situada a uma distância muito maior do que d observam-se franjas de interferência e de difração, conforme a figura. Com base nesta figura, estime a relação a/d. Justifique.



Se a imagem estiver ruim, abra no site. Desculpa qualquer inconveniente...

Solução:

Isso é uma figura real do anteparo iluminado na experiência de Dupla Fenda de Young. Repare na diferença de intensidade do centro ao resto...

Saindo do mundo da lua, precisamos relacionar a e d a partir dos fenômenos de difração e interferência.

Como só conhecemos os mínimos de difração, vamos pegar o primeiro mínimo:

1º mínimo de difração : $a \sin\theta = \lambda$

Olhando pra figura, no ponto de primeiro mínimo de difração, tem uma carinha bem escondido, sofrendo pra brilhar. Ele é um máximo de interferência

Parando para contar, ele é o 6º máximo de interferência (cuidado para não contar o central! Ele ocorre com $m=0$). Assim:

6º mínimo de Interferência : $d \sin\theta = 6\lambda$

Nesse ponto, temos o mesmo θ para o mínimo de difração 1 e para o 6º máximo de interferência. Então:

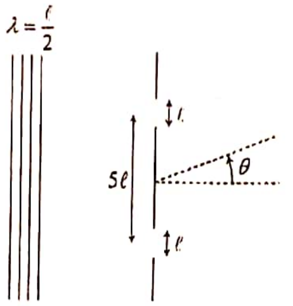
$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{6\lambda}{d} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{d} = \frac{1}{6}}$$

#

$$d \sin\theta = (m + 1/2)\lambda$$

P1 - 2016

(1) Considere um conjunto de duas fendas de largura ℓ, espaçadas por uma distância de 5ℓ. Sobre estas duas fendas incide uma onda plana monocromática, cujo comprimento de onda é igual a $\ell/2$, conforme a figura.



(a) (0.5 ponto) Para quais valores do ângulo de observação θ, indicado na figura, serão observados os dois primeiros mínimos de difração adjacentes ao máximo central?

(b) (1.0 ponto) Considere a região angular $0° \leq \theta \leq 30°$. Qual é o número de mínimos de interferência nesta região?

Solução:

a) Os mínimos da parcela de difração da fórmula:

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$$

Ocorrem quando $\beta = 2m\pi$, ou seja, $\frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta = 2m\pi$, chegando em:

$$a \sin\theta = m\lambda \quad \text{para } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

A partir dos dados do enunciado, chegamos em:

1º mínimo: $\sin\theta = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\ell/2}{\ell} = \frac{1}{2} \therefore \boxed{\theta = 30°}$

Ou, alternativamente, $m = -1$ e $\boxed{\theta = -30°}$

No gabarito oficial, ele colocou ambos os mínimos.

b) Para mínimo de interferência, aplicamos:

$$d\sin\theta = (m+\tfrac{1}{2})\lambda \quad, \text{para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Para $0° \leq \theta \leq 30°$, temos $0 \leq \sin\theta \leq \frac{1}{2}$. Isso significa que:

$$0 \leq (m+\tfrac{1}{2})\frac{\lambda}{d} \leq \frac{1}{2}$$

Como $d = 5\ell$ e $\lambda = \frac{\ell}{2}$, temos:

$$0 \leq \frac{m}{10} + \frac{1}{20} \leq \frac{1}{2}$$

Manipulando a desigualdade, chegamos em:

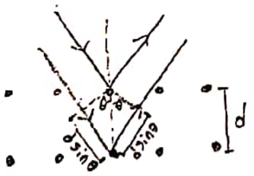
$$0{,}5 \leq m \leq 4{,}5$$

Como m é inteiro, temos, na verdade, $0 \leq m \leq 4$, totalizando $\boxed{5 \text{ mínimos}}$ #

• Difração de Raio X

Essa matéria foi ~~esquecida~~ estudada por alguns em FMT. A ideia é usar a estrutura cristalina de... cristais (?) para ser uma rede de difração de raios X.

O modelo usado para descrever esse fenômeno é indicado abaixo. Nele, os raios X são refletidos a um ângulo θ de incidência. A diferença de caminho é $\Delta d = 2d\sin\theta$ e queremos interferência construtiva:



$$\boxed{2d\sin\theta = m\lambda}$$ Interferência Construtiva.

Lei de Bragg

com $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$

com d sendo a distância entre os planos de difração do cristal.

A Lei de Bragg costuma ser usada ou para descobrir o comprimento de onda λ do Raio X ou a distância d do plano cristalino.

P1 - 2017

(II) (1,0 ponto) Numa experiência de difração com um cristal foi utilizado um feixe de raios X com dois comprimentos de onda. Os menores ângulos para os quais se observaram máximos foram $\theta_1 = 0,014$, $\theta_2 = 0,021$, $\theta_3 = 0,028$ e $\theta_4 = 0,042$, todos eles medidos em radianos. Sabendo-se que a distância entre os planos de difração do cristal é 1 nm (10^{-9} m), determine os comprimentos de onda λ_1 e λ_2 dos raios X do feixe. Observação: para ângulos pequenos $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$.

Solução:

Aqui não tem saída. Devemos usar a Lei de Bragg:

$$2d\sin\theta = m\lambda \quad \text{com } m = 1,2,3,4,\ldots$$

E também $\sin\theta \approx \theta$, nos levando a:

$$\theta \approx m\left(\frac{\lambda}{2d}\right)$$

Agora precisamos associar cada ângulo a cada comprimento de onda λ_1 e λ_2. Como são os menores ângulos, temos:

$$\theta_1\Big|_{m=1} = \frac{\lambda_1}{2d}, \quad \theta_1\Big|_{m=2} = 2\left(\frac{\lambda_1}{2d}\right) \quad \text{e} \quad \theta_2\Big|_{m=1} = \frac{\lambda_2}{2d}, \quad \theta_2\Big|_{m=2} = 2\left(\frac{\lambda_2}{2d}\right)$$

Dos valores do enunciado, temos as seguintes relações:

$$\theta_3 = 2\theta_1 \quad \text{e} \quad \theta_4 = 2\theta_2$$

Com isso, podemos assumir que θ_1 e θ_3 são correspondentes a λ_1 e θ_2 e θ_4 são correspondentes a λ_2, de forma que:

$$\frac{\lambda_1}{2d} = \theta_1 \Rightarrow \lambda_1 = 2d\theta_1 \quad \therefore \quad \boxed{\lambda_1 = 2,8 \cdot 10^{-11}\,\text{m}}$$

$$\frac{\lambda_2}{2d} = \theta_2 \Rightarrow \lambda_2 = 2d\theta_2 \quad \therefore \quad \boxed{\lambda_2 = 4,2 \cdot 10^{-11}\,\text{m}}$$

#

- Difração em orifícios Circulares

Difração pode ocorrer em qualquer tipo de orifício. (°3°). Em uma fenda circular de diâmetro D, o primeiro mínimo de difração ocorre em:

$$\boxed{\sin\theta = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}}$$

Esse é o tipo de fórmula que você fica refletindo se faz sentido. Não importa quantas demonstrações você veja, a gente nunca vai aceitar que a natureza simplesmente disse "Ah, 1,22 parece bom..".

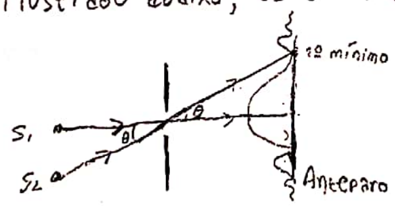
Mas, segue o jogo.

- Critério de Rayleigh

Para finalizar a parte de óptica física, vamos falar de poder de resolução.

Dois objetos começam a ser distinguíveis quando o centro de um deles se encontra no mínimo de difração do outro.

Para dois corpos puntiformes S_1 e S_2 e uma fenda de abertura a, como ilustrado abaixo, as fontes estarão minimamente resolvidas quando:



$$\sin\theta_{min} = \frac{\lambda}{a}$$

$$\boxed{\theta_{min} \approx \frac{\lambda}{a}}$$

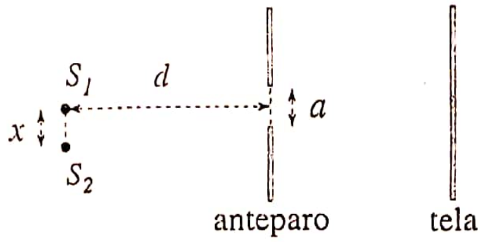
Ou seja, para qualquer $\theta \geq \theta_{min}$, as fontes estarão resolvidas.

Para telescópios com lentes circulares, usamos o limite:

$$\boxed{\theta_{min} \approx 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}}$$

P1 - 2016

(1.0 ponto) Duas fontes de luz S_1 e S_2, não coerentes emitem luz no mesmo comprimento de onda λ. A distância entre as fontes é x e ambas se situam à mesma distância $d >> x$ de um anteparo com uma fenda de largura a. A imagem das fontes é projetada sobre uma tela, conforme a figura. Deduza a dependência entre x, d, λ e a para que as imagens na tela estejam resolvidas.



Solução:

Aqui é um típico caso de ângulos pequenos, já que $d >> x$. Por isso, vamos usar $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$. O Critério de Rayleigh nos dá:

$$\theta \geq \frac{\lambda}{a}$$

Para ângulos pequenos $\theta \simeq \frac{x}{d}$, nos levando a:

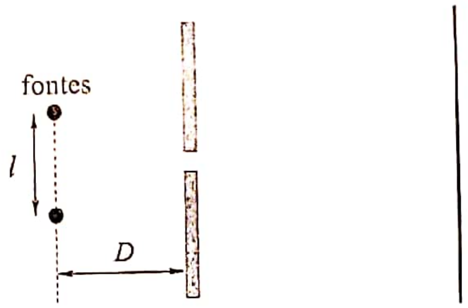
$$\boxed{xa \geq \lambda d}$$

Ou qualquer coisa equivalente #

24

P1 - 2015

Luz de comprimento de onda de 500 nm de uma fonte pontual distante incide normalmente sobre um anteparo com uma fenda de largura a = 5000 nm. O *padrão de difração* é observado numa tela a uma distância $L = 3$ m do anteparo.



(1,0 ponto) Considere agora duas fontes pontuais idênticas, não coerentes, emitindo luz desse mesmo comprimento de onda (500 nm), situadas à mesma distância D da fenda e separadas por $\ell = 2$ m, conforme a figura 2. Determine a distância máxima D para que essas duas fontes estejam minimamente resolvidas no tela.

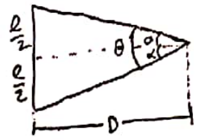
Solução:

Eu percebi depois que a primeira parte do enunciado não tem nada a ver com esse exercício... Paciência!

O Critério de Rayleigh nos dá:

$$\theta_{min} = \frac{\lambda}{a} = \frac{500}{5000} = 0{,}1 \text{ rad}$$

Para ângulos pequenos temos:



$$\theta = 2\alpha \approx 2\overbrace{\tan\alpha}^{\tan\alpha \approx \alpha} \Rightarrow \theta = 2 \cdot \frac{\ell}{2D} \therefore \theta_{min} = \frac{\ell}{D}$$

Igualando os dois, temos:

$$D = \frac{\ell}{\theta_{min}} \Rightarrow \boxed{D \approx 20 \text{ m}}$$

#

25

Relatividade Restrita

A relatividade foi uma grande mudança na física como a gente conhece. Em física III, vimos que a velocidade da luz era:

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \, m/s$$

Relação que veio das Equações de Maxwell. O que ninguém sabia era em qual Referencial essa velocidade era medida. Muitas teorias surgiram para tentar explicar a propagação da luz, mas falharam.

A teoria da relatividade foi a que melhor conseguiu contemplar a realidade e é muito estudada ainda nos dias de hoje. Vamos embarcar nessa gloriosa teoria.

- Postulados de Einstein

A teoria da relatividade foi construída em cima de dois postulados (premissa, fato admitido sem precisar de demonstração):

1º Postulado: As Leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

Isso significa que não existe algo como um referencial "melhor" do que outro, ou mais "correto".

2º Postulado: A velocidade da luz no vácuo é a mesma para qualquer referencial, independente de sua velocidade.

Vamos com calma! O que isso quer dizer?

Se você estiver olhando em direção a uma fonte de luz e medir a velocidade da luz c, essa medida será a mesma caso você a fizesse correndo em direção à fonte!

Na relatividade restrita, vamos desprezar efeitos de acelerações ou gravidades.

• Princípio da Simultaneidade

Por causa do segundo postulado de Einstein, muita coisa que a gente achava que era absoluta deixa de ser.

Antes de tudo, vamos definir o que é um evento. Em relatividade, um evento é um acontecimento com posição e tempo bem definidos.

Uma das primeiras mudanças é o princípio da simultaneidade. Ele nos diz que, se dois eventos forem simultâneos em um sistema de referência, eles não serão simultâneos em nenhum outro que se mova em relação ao primeiro.

• Dilatação do Tempo

Uma das maiores mudanças da física clássica para a relatividade foi nossa percepção de tempo.

Antes de tudo, vamos definir o conceito de tempo próprio. O tempo próprio Δt_0 é um intervalo de tempo entre dois eventos que ocorrem em um mesmo ponto no referencial S.

Para outros referenciais S', o intervalo de tempo Δt medido entre esses dois eventos são diferentes do primeiro.

A relação entre Δt e Δt_0 quando o referencial S' possuir velocidade v relativa a S, é:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

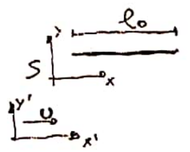
Como um corpo não pode ter velocidade v maior que a da luz c, o intervalo de tempo Δt é sempre maior que o tempo próprio Δt_0.

• Contração do comprimento

Outro fenômeno análogo ao anterior é a contração do comprimento.

Da mesma forma que definimos o tempo próprio, o comprimento próprio é o comprimento de um corpo medido em um referencial em repouso em relação ao corpo.

Para falar da contração, imagine uma barra de tamanho próprio l_0 medido no referencial S. O tamanho l dessa barra medido num referencial S' com velocidade u relativa a S paralela à barra é:



$$\boxed{l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Mostrando que, em movimento, o comprimento sempre diminui.

Caso a velocidade fosse perpendicular à barra, não haveria contração.

• Transformações de Lorentz

Na física clássica, a mudança de referencial de S para S' com velocidade $u\hat{\imath}$ em relação a S era:

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad e \quad \underbrace{t = t'}_{\text{tempo absoluto}}$$

Em relatividade, isso não serve mais. Devemos agora usar as transformadas de Lorentz, dadas por:

Transformada da Coordenada	$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) \end{cases}$	ou	$\begin{cases} x = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right) \end{cases}$

Em que: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

Ou seja, quando um evento ocorrer nas coordenadas (x, y, z, t) em S, podemos achar as coordenadas (x', y', z', t') desse mesmo evento no referencial S'.

Além da transformada de coordenada, temos também as transformadas de velocidade. Dado um corpo que se move com velocidade $\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$ no referencial S. A velocidade desse corpo num referencial S' com velocidade $u\hat{i}$ em relação a S é:

$$\boxed{\begin{cases} V_x' = \dfrac{V_x - U}{1 - \frac{UV_x}{c^2}} \\ V_y' = \dfrac{V_y\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uV_x}{c^2}} \\ V_z' = \dfrac{V_z\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{UV_x}{c^2}} \end{cases}}$$

Transformada da Velocidade

Considerações Finais e Formulário

por: Fujita

Bem... Senti falta de fazer resumos da Zerox... Mas aqui estou eu de volta!

Mais uma vez, espero que esse resumo seja de grande ajuda para você fechar as física tudo!

Por favor, qualquer dúvida, feedback, lamentações, etc, entre em contato comigo. Se vocês gostaram, fale-me também, pois assim continuo resumindo sua P2 e P3.

O que vem a seguir são resoluções de algumas provas antigas. Abaixo está o formulário que o IF disponibilizou ano passado.

Formulário

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x' = \dfrac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}, \\ v_y' = \dfrac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}, \\ v_z' = \dfrac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}. \end{cases}$$

O referencial S' coincide com S em $t = t' = 0$ e se move em relação a S com velocidade $\vec{u} = u\hat{\imath}$.

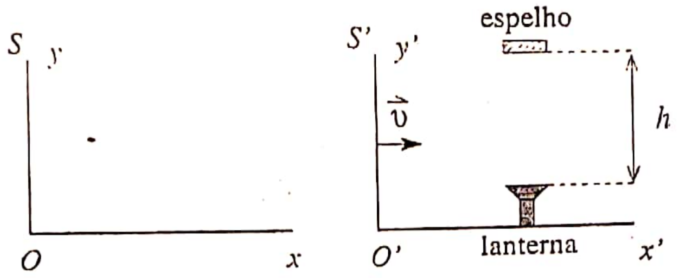
$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \ell = \ell_0\sqrt{1-u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

$$I = I_0\cos^2(\phi/2), \quad I = I_0\left[\frac{\mathrm{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \quad I = I_0\cos^2(\phi/2)\left[\frac{\mathrm{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2,$$

$$\phi = 2\pi d\,\mathrm{sen}\,\theta/\lambda, \quad \beta = 2\pi a\,\mathrm{sen}\,\theta/\lambda, \quad \lambda = \lambda_0/n, \quad 2d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda.$$

P1 – 2016

Uma lanterna está em repouso no sistema inercial S' que se move com velocidade $\vec{v} = 4c/5\hat{\imath}$ em relação a um outro sistema inercial S. Em um determinado instante, um pulso de luz é emitido pela lanterna e propaga-se paralelamente ao eixo $O'y'$ até ser refletido por um espelho paralelo ao plano $x'z'$, retornando à lanterna. A distância entre a lanterna e o espelho é $h = 9$ m, conforme a figura.



(a) (1.0 ponto) Qual é o intervalo de tempo medido em S' entre a emissão e o retorno do pulso luminoso?

(b) (1.5 ponto) Qual é a distância percorrida pela lanterna durante estes dois eventos (emissão e retorno do pulso), medida no referencial S ?

"Solução:"

a) Calma! Esse não é o item para você meter o loco nas fórmulas de dilatação e contração!

No referencial S', a lanterna está em repouso! O que vamos medir é o tempo próprio entre os eventos emissão e retorno.

O tempo é o simples cálculo do tempo que leva para a luz ir e voltar, percorrendo 2h:

$$c = \frac{2h}{\Delta t_0} \Rightarrow \Delta t_0 = \frac{2h}{c} \Rightarrow \Delta t_0 = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 10^8} \therefore \boxed{\Delta t_0 = 6 \cdot 10^{-8}\,s}$$

b) No referencial S, a lanterna se move com velocidade $v = \frac{4c}{5}$, igual ao do referencial S'. Além disso, há a dilatação do tempo próprio, dada por:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_0}{\frac{3}{5}} = 10^{-7}s \qquad e \qquad d = v \cdot \Delta t = \frac{4c}{5} \cdot \Delta t$$

$$d = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-7}}{5}\,m \therefore \boxed{d = 24\,m}$$

#

30

P1 – 2017

Uma espaçonave parte da Terra no instante $t = 0$ e mantém sua jornada em linha reta com velocidade escalar v em direção a uma estação espacial que se localiza a uma distância D da Terra segundo observadores na Terra. Considere v próxima à velocidade da luz e despreze efeitos de aceleração da espaçonave.

(a) (1,0 ponto) Calcule o tempo necessário para a espaçonave atingir a estação segundo seu comandante.

(b) (1,5 ponto) No instante em que atinge a estação, a espaçonave emite um sinal luminoso na direção da Terra e continua sua viagem em linha reta. Segundo o comandante, qual é o intervalo de tempo entre a emissão e a chegada deste sinal à Terra e quanto a espaçonave se afastou da estação espacial neste mesmo intervalo de tempo?

Solução:

a) Temos duas formas de resolver esse item:

• Forma 1: contração do comprimento

Podemos dizer que a distância entre a Terra e a estação é o comprimento próprio (considerando que D não varia).
Assim, na visão do comandante, essa distância contrai:

$$D_{com} = D\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \text{(contração do comprimento)}$$

O tempo para a nave percorrer a distância contraída, de acordo com o comandante é:

$$\Delta t = \frac{D_{com}}{v} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{D\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v}}$$

• Forma 2:

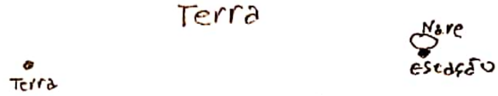
O intervalo de tempo para a nave chegar de acordo com o pessoal da Terra é:

$$\Delta t_T = \frac{D}{v}$$

Só que esse não é o tempo próprio, pois os eventos sair da Terra e chegar na estação não ocorrem no mesmo ponto. Já para o capitão, o evento de sair e chegar ocorrem no mesmo ponto (imagine que a nave, estação e terra sejam pontos).

Eventos:

Evento de sair da Terra



Evento de chegada na Estação

Assim, o tempo do capitão é o próprio, e o do pessoal da Terra é o dilatado:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{D\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v}}$$

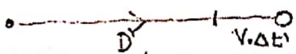
b) Aqui devemos tomar um pequeno cuidado! No referencial do comandante, a luz se afasta com velocidade c. Além disso, a Terra também se afasta com velocidade v!

É como se a luz tivesse perseguindo a Terra!

$t=0$

Evento de emissão

$t=\Delta t'$



Evento de recepção

Então a distância que a luz percorre é a distância contraída mais o quanto a Terra deslocou:

$$\Delta t' = \frac{D\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + v\Delta t'}{c}$$

Assim, chegamos em:

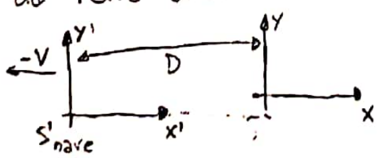
$$\Delta t'(c-v) = D\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)}$$

$$\boxed{\Delta t' = \frac{D}{c}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}$$

E, de acordo com o comandante, a espaçonave se afastou em:

$$d = v\cdot\Delta t \Rightarrow \boxed{d = \frac{Dv}{c}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}$$

Ou, por transformada de Lorentz, definimos o referencial da nave e da Terra abaixo:



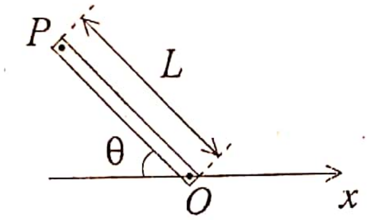
Início: $(x_i, t_i) = (-D, 0) \Rightarrow (\Delta x, \Delta t) = (D, \frac{D}{v})$

Fim: $(x_f, t_f) = (0, \frac{D}{v})$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{(-v)\Delta x}{c^2}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta t' = \frac{D}{c}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}} \quad \#$$

P1 - 2017

Uma barra de comprimento próprio L, orientada segundo um ângulo θ em relação ao eixo x está em repouso em um sistema inercial S, conforme a figura. Considere um sistema S' que se move com velocidade constante $\vec{v} = u\,\hat{\imath}$ em relação a S. Nos itens abaixo expresse suas respostas em termos de L, u, V, θ e da velocidade da luz c.



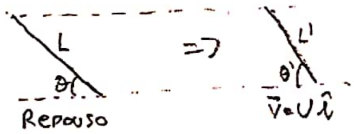
(a) (1,0 ponto) Qual é o comprimento L' da barra no sistema S'?

(b) (1,0 ponto) Qual é o ângulo de orientação θ' da barra no sistema S'?

(c) (0,5 ponto) Suponha agora que uma partícula relativística se move ao longo da barra com velocidade V, medida em S, no sentido de P para O. Quais são as componentes do vetor velocidade desta partícula para um observador em S'?

Solução:

a) Lembrando que a contração ocorre apenas na direção da velocidade, vamos ter:



$L_x = L\cos\theta \Rightarrow L'_x = L\cos\theta\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$

$L_y = L'_y = L\sin\theta$

$L = \sqrt{L_x^2+L_y^2} \Rightarrow \boxed{L' = L\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\cos^2\theta}}$

b) Pela geometria, vamos ter:

$\theta = \arctan\left(\frac{L'_y}{L'_x}\right) \Rightarrow \boxed{\theta' = \arctan\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)}$

c) Vamos precisar usar a transformada da velocidade de Lorentz:

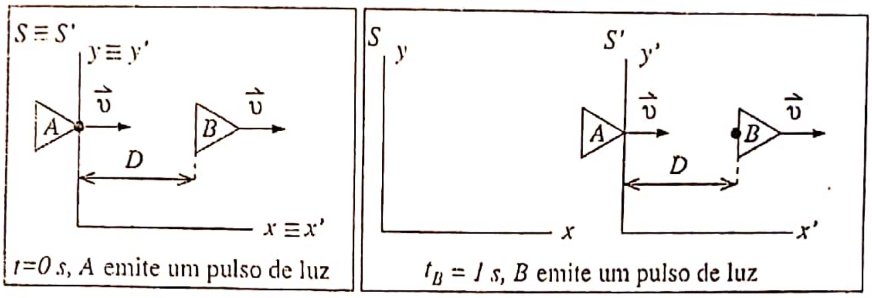
$V_x = V\cos\theta$ $\Rightarrow v'_x = \frac{v_x - u}{1-\frac{v_x u}{c^2}} \Rightarrow \boxed{v'_x = \left(\frac{V\cos\theta - u}{c^2 - uV\cos\theta}\right)c^2}$

$V_y = V\sin\theta$ $\Rightarrow v'_y = \frac{V_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\frac{uV_x}{c^2}} \Rightarrow \boxed{v'_y = \left(\frac{-V\sin\theta\sqrt{c^2-u^2}}{c^2-uV\cos\theta}\right)c}$ #

33

P1 - 2016

Um observador na Terra (referencial S) observa duas naves espaciais A e B movendo-se com a mesma velocidade $\vec{v} = 3c/5\hat{i}$, constante, separadas por uma distância igual a $D = 6 \times 10^8$ m. Este mesmo observador vê no instante $t = 0$ s a proa da nave A, com coordenada $x = 0$, emitir um pulso de luz e no instante $t_B = 1$ s a popa da nave B emitir um outro pulso de luz, conforme a figura. O referencial S da Terra e o referencial S' no qual as naves estão em repouso coincidem em $t = t' = 0$.



(a) (0,5 ponto) Calcule no referencial S a coordenada x_B do pulso emitido pela nave B no instante $t_B = 1$ s.

(b) (1,0 ponto) Calcule no referencial S' o instante t'_B em que o pulso é emitido pela nave B.

(c) (0,5 ponto) O pulso de luz emitido por B poderia ser uma resposta ao pulso de luz emitido por A?

(d) (0,5 ponto) Calcule a distância D' entre as naves no referencial S'.

a) A coordenada x_B em S pode ser determinada calculando a distância percorrida entre $t=\emptyset$ e $t=1s$:

$$x_B = v_B \cdot t_B + \underbrace{D}_{\text{posição inicial de B em } t=\emptyset} \Rightarrow x_B = 1{,}8\cdot10^8 + 6\cdot10^8 \therefore \boxed{x_B = 7{,}8\cdot10^8 \, m}$$

b) Podemos usar a transformada de Lorentz:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \xrightarrow{(x_B, t_B)} t'_B = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}\left(1 - \frac{\frac{3}{5}\cdot 7{,}8\cdot10^8}{3\cdot10^8}\right) = \frac{5}{4}\cdot\left(1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{13}{5}\right) \therefore \boxed{t'_B = -0{,}7\,s}$$

c) No item b), encontramos um instante de tempo negativo. A nave A emite um pulso em $t=t'=\emptyset$. Como B manda o pulso antes, em S', não faz sentido ser uma resposta.

d) O D é a distância medida pelo observador na Terra. D' é o comprimento próprio. Por isso, temos:

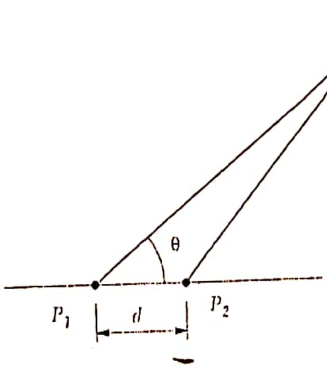
$$D = D'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow D' = \frac{5}{4}\cdot D \therefore \boxed{D' = 7{,}5\cdot10^8 m}$$

#

B4

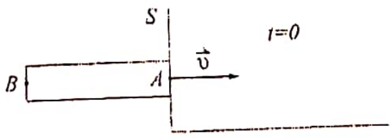
P1 - 2015

(I) (1,0 ponto) Um receptor em P recebe o sinal de uma antena de rádio que transmite em frequência f a partir de um local distante P_1. Uma nova antena é construída no ponto P_2 a uma distância d da primeira. A nova antena transmite sinal idêntico à primeira. A direção PP_1 faz um ângulo θ com a direção P_1P_2, conforme a figura, e $d \ll PP_1$.



Para quais frequências haverá melhor recepção possível (máxima intensidade de recepção)?

(II) Uma barra de comprimento próprio ℓ_0 move-se com velocidade constante $\vec{v} = v\hat{\imath}$ relativamente ao sistema S conforme a figura. A extremidade A da barra passa pela origem de S no instante $t = 0$. Neste instante é emitido de A um sinal de luz que viaja de A para B.



(a) (0,5 ponto) Em que instante t'_B medido num referencial em repouso em relação à barra o sinal chega a B?

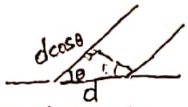
(b) (1,0 ponto) Em que instante t_B medido no referencial S o sinal chega a B?

"Solução:"

I-

Eu sei que óptica física tá no início do resumo, e que provavelmente você já esqueceu. Vamo lá, vai.

O desenho é bem infeliz, pois as distâncias são pequenas. Mas como $PP_1 >> d$, podemos deixar os raios aproximadamente paralelos:



Para máximo de intensidade, a diferença de caminho deve ser múltiplo de λ, ou $\frac{c}{f}$:

$$d\cos\theta = \frac{mc}{f} \quad , \text{ com } m = 0, 1, 2, \dots$$

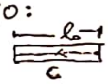
Por fim:

$$\boxed{f = \frac{mc}{d\cos\theta} \, , \text{ com } m \in \mathbb{N}_*}$$

Obs: Esse exercício é tipo Dupla Fenda de Young #

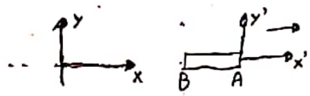
II-

a) Com a barra em repouso, a O pulso percorre seu comprimento próprio:



$$\boxed{\Delta t'_B = \frac{\ell_0}{c}}$$

b) Podemos adotar um referencial S' com origem em A e velocidade $\vec{V} = V\hat{i}$ em relação a S:



Faremos isso para aplicar a transformada de Lorentz no tempo:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) \Rightarrow t_B = \gamma\left(t'_B - \frac{V\cdot(-\ell_0)}{c^2}\right) = \frac{\ell_0}{c}\frac{\left(1 - \frac{V}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \therefore \boxed{t_B = \frac{\ell_0}{c}\sqrt{\frac{c-V}{c+V}}}$$

Ou então dizemos que a luz percorre o comprimento contraído menos o que B percorreu nesse intervalo de tempo:

$$t_B = \frac{\ell_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - V_B t_B}{c} \quad \therefore \quad \boxed{t_B = \frac{\ell_0}{c}\sqrt{\frac{c-V}{c+V}}}$$

P1 - 2015

Uma película transparente de espessura $t = 4 \times 10^{-5}$ cm e com índice de refração $n = 1,5$ é iluminada normalmente por luz branca. A película está suspensa no ar (índice de refração $n = 1$).

(a) (1,0 ponto) A luz refletida nas duas superfícies da película interferem entre si. Obtenha a equação que determina os comprimentos de onda das ondas que interferem construtivamente.

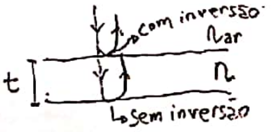
(b) (0.5 ponto) A luz visível é composta por ondas com comprimentos de onda entre 400 nm e 700 nm. Qual onda da luz visível interferirá construtivamente?

(c) (1,0 ponto) A mesma película é imersa num líquido com índice de refração $n_2 > 1,5$. Escreva a equação que determina os comprimentos de onda que interferem construtivamente.

Solução:

a) Ok, não sei em que universo é normal uma película ficar suspensa no ar. "Normalmente", nenhum!

Enfim, interferência! A situação é essa:



$\Delta\phi = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \cdot 2t + \pi = 2m\pi$ → Interferência construtiva

$\therefore \frac{4nt}{\lambda_0} = (2m-1) \Rightarrow \boxed{\lambda_0 = \frac{2400}{2m-1}}$, com $m = 1, 2, 3, \ldots$ em nanômetros

b) Vamos aplicar alguns valores de m:

$m=1$ $\lambda_0 = \frac{2400}{1} = 2400$ nm

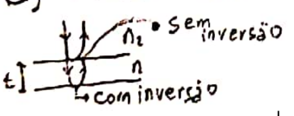
$m=2$ $\lambda_0 = \frac{2400}{3} = 1200$ nm

$m=3$ $\lambda_0 = \frac{2400}{5} = 480$ nm ✓

$m=4$ $\lambda_0 = \frac{2400}{7} \simeq 343$ nm (Já passou)

$\therefore \boxed{\lambda_0 = 480 \text{ nm}}$

c) Vamos desenhar a situação:

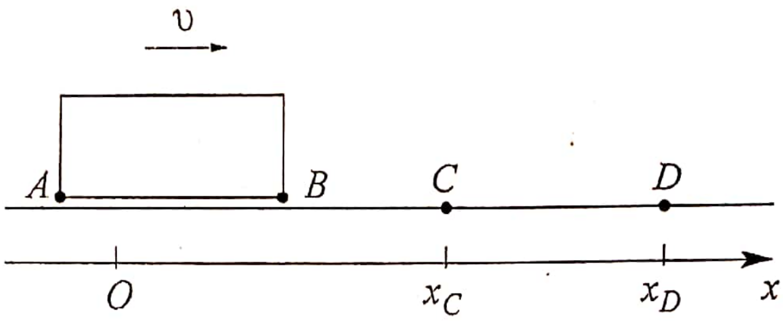


$\Delta\phi = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \cdot 2t + \pi = 2m\pi \therefore \boxed{\lambda_0 = \frac{2400}{2m-1}}$, com $m = 1, 2, 3, \ldots$

Obs: No gabarito, ele dá duas respostas diferentes em a) e c), pois em um ele somou π e em outro subtraiu π. Somar ou subtrair π não muda a resposta final. O que importa é que haja inversão de fase! E adaptar o m.

P1 – 2015

Um veículo se move com velocidade uniforme v em relação ao solo. Sejam A e B as extremidades do veículo e C e D marcações no solo, como na figura. Definamos o evento $B \equiv C$ como a passagem de B por C e os eventos $B \equiv D$, $A \equiv C$ e $A \equiv D$ de forma análoga.



(a) (1,0 ponto) Se o intervalo de tempo entre os eventos $B \equiv C$ e $A \equiv C$ (tempo gasto pelo veículo para passar pelo ponto C) no referencial do veículo é $\Delta t'$, qual é o intervalo de tempo entre esses eventos no referencial do solo?

(b) (1,0 ponto) Se os eventos $B \equiv D$ e $A \equiv C$ são simultâneos no referencial do veículo, qual é o intervalo de tempo entre esses eventos no referencial do solo?

(c) (0,5 pontos) Qual é a ordem temporal dos eventos $B \equiv D$ e $A \equiv C$ no referencial do solo?

Solução:

a) O tempo próprio desses eventos é o de C em repouso, pois dele os eventos ocorrem no mesmo ponto. Assim, Δt é tempo próprio e dilata virando $\Delta t'$: $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \Delta t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

b) Pelo princípio da simultaneidade, o evento no referencial do solo não é simultâneo. Vamos chamar o referencial do solo de S' e e do carro de S e vamos usar a transformada de Lorentz:

$t = \gamma\left(t' + \frac{(-v)x'}{c^2}\right) \Rightarrow \Delta t = \gamma\left(\Delta t' - \frac{v\Delta x'}{c^2}\right) \xrightarrow{\Delta t = 0} \Delta t' = \frac{v\Delta x'}{c^2} \therefore \boxed{\Delta t' = \frac{v(x_D - x_C)}{c^2}}$

Repare que a velocidade de S' em relação a S é $-v$.

c) Pela figura, $x_D > x_C$. Nesse caso como $t_{B\equiv D} - t_{A\equiv C}$ é positivo, leva-se mais tempo para $B \equiv D$ do que $A \equiv C$, sendo este o precessor