ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

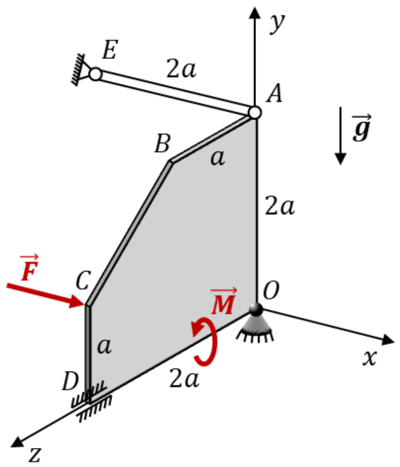
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I (Reoferecimento) – Prova 1 – 10 de Junho de 2021

Duração da Prova: 120 minutos (Início: 18:00 – Término: 20:00)

1ª Questão (4,0 pontos). No sistema em equilíbrio mostrado na figura, a placa homogênea $OABCD$, de massa m, está no plano Oyz e tem seu movimento restrito pela articulação em O, pelo anel em D e pela barra AE. A barra é paralela ao eixo Ox e tem peso desprezível. Sobre a placa atuam a força $(\vec{F}, C) = F\hat{\mathbf{i}}$, o peso $(\vec{P}, G) = -mg\hat{\mathbf{j}}$ e o binário $\vec{M} = M\hat{\mathbf{k}}$. Determinar:

- **a)** As coordenadas do centro de massa G da placa no sistema $Oxyz$.
- **b)** O diagrama de corpo livre da placa.
- **c)** As equações de equilíbrio da placa.
- **d)** Os esforços atuantes na barra AE.
- **e)** As reações vinculares em O e D.



RESOLUÇÃO

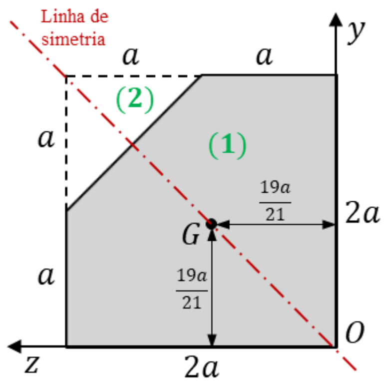
a) Placa no plano Oyz, portanto: $x_G = 0$. **(0,1)**

Como a placa é homogênea, tem-se (veja figura ao lado):

$$A_{total} y_G = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i \Rightarrow (A_1 - A_2) y_G = A_1 y_{G_1} - A_2 y_{G_2}$$

$$\left(4a^2 - \frac{a^2}{2}\right) y_G = 4a^2 a - \frac{a^2}{2}\left(2a - \frac{a}{3}\right) \Rightarrow y_G = \frac{19a}{21} \quad \textbf{(0,2)}$$

Por simetria, $z_G = y_G \Rightarrow z_G = \frac{19a}{21}$ **(0,2)**

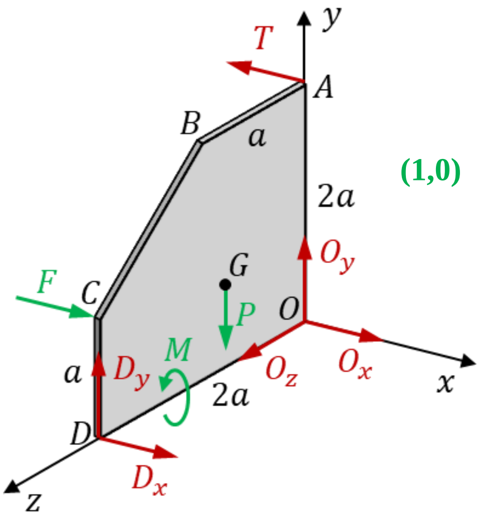


(1) quadrado de lado $2a$
(2) triângulo retângulo de lado a

Portanto, as coordenadas do centro de massa G da placa no sistema $Oxyz$ podem ser expressas, como segue:

$$(G - O) = \frac{19a}{21}(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$$

b) Veja o DCL da plana na figura ao lado.



c) Equações de equilíbrio da placa:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow D_x + F + O_x - T = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow D_y - mg + O_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \Rightarrow O_z = 0 \end{cases} \quad \textbf{(0,5)}$$

$$\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma M_x = 0 \Rightarrow -2aD_y + \dfrac{19mga}{21} = 0 \\ \Sigma M_y = 0 \Rightarrow 2aD_x + 2aF = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \Rightarrow -aF + M + 2aT = 0 \end{cases} \quad \textbf{(0,5)}$$

d-e) Resolvendo o sistema linear de equações para as variáveis $(O_x, O_y, O_z, D_x, D_y, T)$, obtêm-se:

$O_x = \frac{aF-M}{2a}$ **(0,2)** $O_z = 0$ **(0,2)** $D_y = \frac{19mg}{42}$ **(0,2)**

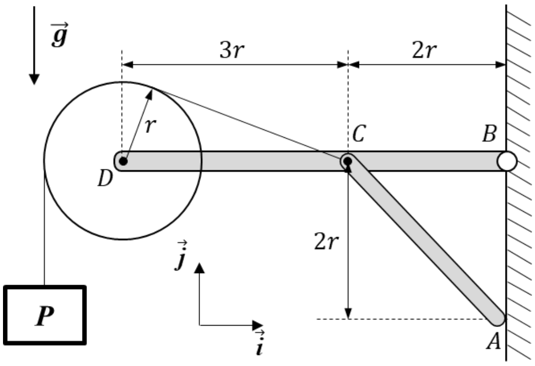
$O_y = \frac{23mg}{42}$ **(0,2)** $D_x = -F$ **(0,2)** $T = \frac{aF-M}{2a}$ **(0,5)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

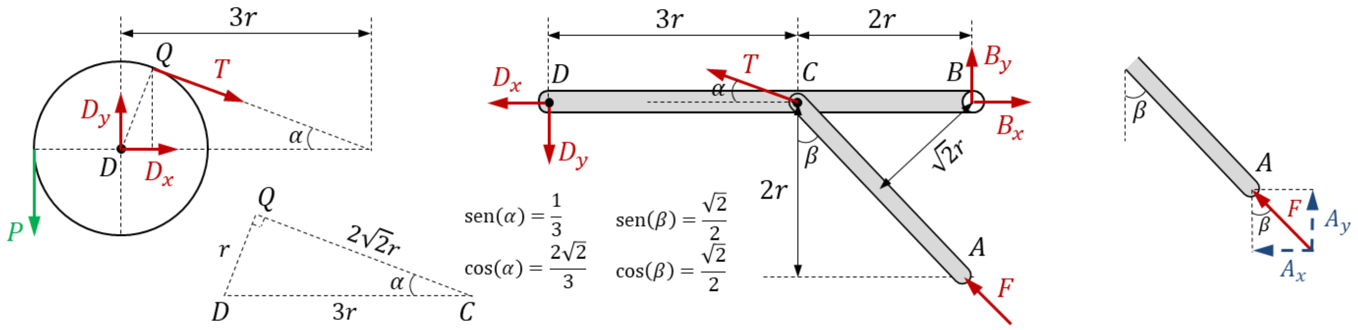
2ª Questão (3,0 pontos). A estrutura ilustrada na figura é constituída pelas barras articuladas BCD e AC, ambas de peso desprezível. Em D há uma polia, também de peso desprezível, que sustenta uma carga de peso P por meio de um cabo inextensível ideal. A extremidade A da barra AC apoia-se em uma parede vertical, e o coeficiente de atrito estático no contato entre a parede e a barra é μ. Todos os vínculos são ideais e o sistema está em equilíbrio. Admitindo $P = 000\,N$, calcule e escreva suas respostas nos campos abaixo. **Responda o que é solicitado abaixo, preenchendo os respectivos campos sem incluir unidades e com apenas 2 casas decimais.** **Utilizar PONTO como separador de decimais.**



- **a)** A força de tração no cabo.
- **b)** Os *módulos* das componentes da força em D.
- **c)** Os *módulos* das componentes da força em A.
- **d)** O menor coeficiente de atrito μ entre a barra AC e a parede vertical que seja compatível com o equilíbrio estático da estrutura.

RESOLUÇÃO

Diagramas de Corpo Livre:



Equações de equilíbrio da polia:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow \quad D_x + T\cos(\alpha) = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow D_y - T\mathrm{sen}(\alpha) - P = 0 \end{cases}$$

$$\vec{M}_D = \vec{0} \Rightarrow \{\Sigma M_{D_z} = 0 \Rightarrow Pr - Tr = 0 \Rightarrow T = P$$

Equações de equilíbrio do conjunto de barras:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow -D_x + B_x - T\cos(\alpha) - F\cos(\beta) = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -D_y + B_y + T\mathrm{sen}(\alpha) + F\mathrm{sen}(\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{M}_B = \vec{0} \Rightarrow \{\Sigma M_{B_z} = 0 \Rightarrow D_y 5r - T\mathrm{sen}(\alpha)2r - F\sqrt{2}r = 0$$

Resolvendo o sistema linear de equações para as variáveis $(T, D_x, D_y, B_x, B_y, F)$ e substituindo os valores das funções trigonométricas mostrados na figura acima, obtêm-se:

$$D_x = -\frac{2\sqrt{2}P}{3} \qquad B_x = 3P \qquad T = P$$

$$D_y = \frac{4P}{3} \qquad B_y = -2P \qquad F = 3\sqrt{2}P$$

a) $T = P$ **(0,75)**

b) $|D_x| = \frac{2\sqrt{2}P}{3} \qquad |D_y| = \frac{4P}{3}$ **(0,75)**

c) Conforme ilustração no direito da figura acima, tem-se:

$$|A_x| = |F|\mathrm{sen}(\beta) = 3P$$
$$|A_y| = |F|\cos(\beta) = 3P$$

(0,75)

d) $|F_{at}| \leq \mu|N| \Rightarrow$

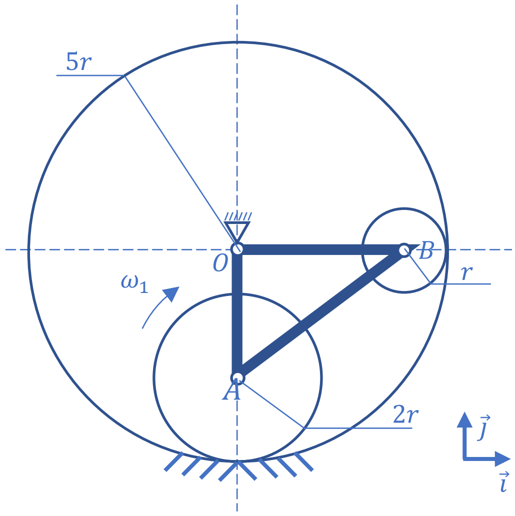
$|A_y| \leq \mu|A_x| \quad \Rightarrow \quad \mu \geq 1$ **(0,75)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão. (3,0 pontos). A figura ao lado ilustra um mecanismo constituído por um aro fixo de raio $5r$ e dois discos, um de centro A e raio $2r$ e outro de centro B e raio r, ambos articulados a uma treliça AOB, a qual, por sua vez, é articulada em O, centro fixo do aro. O dispositivo assim construído mantém os discos em contato permanente com a superfície interna do aro. Ambos os discos realizam movimento de rolamento sem escorregamento. Sabendo que a velocidade angular do disco de centro A é ω_1 (constante) e utilizando a base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ indicada na figura, pede-se:



a) a velocidade do ponto A.
b) o módulo da velocidade angular do disco de centro B.
c) a velocidade do ponto B
d) o módulo da velocidade angular da treliça.
e) a aceleração do ponto A.
f) a aceleração do ponto de contato entre o disco de centro A e o aro.

RESOLUÇÃO

Chamemos de C ao ponto do disco de centro A em contato com o aro e de D ao ponto do disco de centro B em contato com o aro. Como ambos os discos rolam sem escorregar, a velocidade do ponto A é dada por:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + (-\omega_1)\vec{k} \wedge (A - C) = \vec{0} - \omega_1\vec{k} \wedge 2r\vec{j} = 2\omega_1 r\vec{i} \qquad \textbf{(0,5)}$$

e a velocidade do ponto B é dada por:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_D + (-\omega_2)\vec{k} \wedge (B - D) = \vec{0} - \omega_2\vec{k} \wedge (-r\vec{i}) = \omega_2 r\vec{j}$$

Aplicando-se a equação vincular da cinemática à barra AB, tem-se:

$$\vec{v}_A \cdot (B - A) = \vec{v}_B \cdot (B - A) \Rightarrow 2\omega_1 r\vec{i} \cdot (4r\vec{i} + 3r\vec{j}) = \omega_2 r\vec{j} \cdot (4r\vec{i} + 3r\vec{j}) \Rightarrow 8\omega_1 r^2 = 3\omega_2 r^2$$

Assim, resulta:

$$\omega_2 = \frac{8}{3}\omega_1 \qquad \textbf{(0,5)}$$

A velocidade do ponto B é, portanto:

$$\vec{v}_B = \frac{8}{3}\omega_1 r\vec{j} \qquad \textbf{(0,5)}$$

Como A e B são pontos da treliça AOB, tem-se:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega\vec{k} \wedge (B - A) \Rightarrow \frac{8}{3}\omega_1 r\vec{j} = 2\omega_1 r\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge (4r\vec{i} + 3r\vec{j}) = 2\omega_1 r\vec{i} + 4\omega r\vec{j} - 3\omega r\vec{i}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}\omega_1 r\vec{j} - 2\omega_1 r\vec{i} = 4\omega r\vec{j} - 3\omega r\vec{i} \Rightarrow \begin{cases} -2\omega_1 r = -3\omega r \\ \dfrac{8}{3}\omega_1 r = 4\omega r \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{2}{3}\omega_1 \qquad \textbf{(0,5)}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

A aceleração do ponto A é dada por:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (A - O) + \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge (A - O)\right] = \vec{0} + \vec{0} \wedge (-3r\vec{j}) + \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge (-3r\vec{j})\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = 3\omega^2 r\vec{j} = 3\left(\frac{2}{3}\omega_1\right)^2 r\vec{j} = \frac{4}{3}\omega_1^2 r\vec{j} \qquad \textbf{(0,5)}$$

A aceleração do ponto C do disco de centro A, em contato com o aro, é dada por:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \dot{\omega}_1\vec{k} \wedge (C - A) + (-\omega_1)\vec{k} \wedge \left[-\omega_1\vec{k} \wedge (C - A)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_C = \frac{4}{3}\omega_1^2 r\vec{j} + \vec{0} \wedge (-2r\vec{j}) - \omega_1\vec{k} \wedge \left[-\omega_1\vec{k} \wedge (-2r\vec{j})\right] = \frac{4}{3}\omega_1^2 r\vec{j} + 2\omega_1^2 r\vec{j} = \frac{10}{3}\omega_1^2 r\vec{j} \qquad \textbf{(0,5)}$$