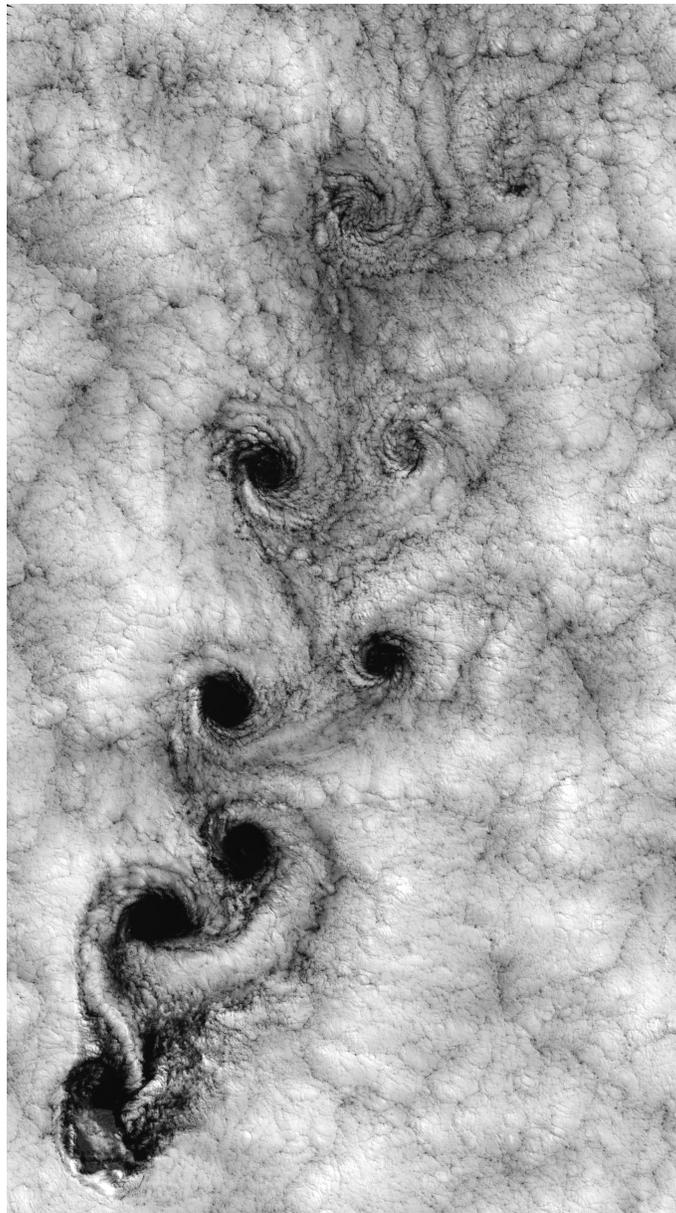


Mecânica dos Fluidos

Bruno Sorban e Patrick Sampaio

Agosto 2020



Contents

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 5 |
| 1.1 | Princípios governantes | 5 |
| 1.2 | Grandes problemas a serem resolvidos: | 5 |
| 2 | Propriedades dos fluidos | 5 |
| 2.1 | Conceitos básicos | 5 |
| 2.2 | Medidas da Massa e do Peso dos Fluidos | 6 |
| 2.2.1 | Tabela de conversão entre unidades de pressão | 7 |
| 2.3 | Lei de newton da viscosidade | 7 |
| 2.4 | Reologia de fluidos Newtonianos e não Newtonianos | 8 |
| 2.5 | Lei dos Gases Perfeitos | 9 |
| 2.6 | Compressibilidade dos Fluidos | 9 |
| 2.7 | Tensão superficial | 10 |
| 2.7.1 | Capilaridade | 10 |
| 2.8 | Pressão de Vapor | 11 |
| 2.9 | Cavitação | 11 |
| 3 | Estática dos Fluidos | 13 |
| 3.1 | Conceitos de tensão e definição de pressão | 13 |
| 3.2 | Lei de Pascal | 14 |
| 3.3 | Equação básica do campo de pressão | 14 |
| 3.4 | Equação fundamental da estática dos fluidos | 14 |
| 3.4.1 | Variação da pressão atmosférica | 14 |
| 3.4.2 | Cálculos práticos para fluidos incompressíveis | 15 |
| 3.5 | Medidores de pressão | 16 |
| 3.5.1 | Principais Manômetros | 16 |
| 3.5.2 | Trabalhando com a pressão | 17 |
| 3.5.3 | Medidas de pressão | 18 |
| 3.6 | Força hidrostática sob uma superfície plana | 18 |
| 3.6.1 | Barragem de gravidade | 20 |
| 3.6.2 | Efeito da pressão atmosféricas | 20 |
| 4 | Cinemática | 21 |
| 4.1 | O campo de escoamento e de velocidades | 21 |
| 4.2 | Classificação dos escoamentos | 21 |
| 4.2.1 | Compressibilidade | 21 |
| 4.2.2 | Movimento de rotação | 21 |
| 4.3 | Regimes de escoamento | 21 |
| 4.3.1 | Regime permanente | 21 |
| 4.3.2 | Regime transiente | 22 |
| 4.4 | Linhas de corrente, emissão e trajetória | 23 |
| 4.4.1 | Linhas de corrente | 23 |
| 4.4.2 | Linhas de Emissão | 24 |
| 4.4.3 | Linhas de trajetória | 24 |
| 4.4.4 | Linhas de tempo | 25 |
| 4.5 | Vazão (Q) | 26 |
| 4.5.1 | Vazão mássica (\dot{m}) | 26 |
| 4.6 | Descrição dos escoamentos e aceleração | 26 |
| 4.6.1 | Método Euleriano ou Variação Local | 26 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.6.2 | A aceleração | 27 |
| 4.6.3 | Método Lagrangeano ou Variação Material | 27 |
| 4.6.4 | Derivada Material | 27 |
| 5 | Dinâmica dos Fluidos Elementar e a Equação de Bernoulli | 28 |
| 5.1 | A segunda lei de Newton | 28 |
| 5.1.1 | Fluido perfeito | 28 |
| 5.1.2 | O movimento | 28 |
| 5.2 | Equação de Euler | 29 |
| 5.3 | Equação de Bernoulli | 29 |
| 5.3.1 | Em exercícios | 31 |
| 5.4 | Pressão Estática, Dinâmica e de Estagnação | 31 |
| 5.4.1 | Pressão Estática ou Termodinâmica | 31 |
| 5.4.2 | Pressão Hidrostática | 31 |
| 5.4.3 | Pressão de estagnação | 32 |
| 5.4.4 | Pressão dinâmica | 32 |
| 5.4.5 | Exemplo | 32 |
| 5.5 | O tubo de Pitot | 32 |
| 5.6 | A equação de Bernoulli na direção normal à linha de corrente | 33 |
| 5.7 | Outros conceitos e consequências relacionados | 33 |
| 5.7.1 | Linha Piezométrica | 33 |
| 5.7.2 | Efeito Coandă | 34 |
| 5.7.3 | Efeito Magnus | 34 |
| 6 | Análise com Volumes de Controle Finitos | 35 |
| 6.1 | Introdução | 35 |
| 6.2 | Teorema do Transporte de Reynolds (TTR) | 35 |
| 6.2.1 | Efeitos no regime permanente | 37 |
| 6.2.2 | Efeitos no regime transitório | 37 |
| 6.2.3 | Volumes de controle móvel | 37 |
| 6.3 | Conservação da massa | 37 |
| 6.3.1 | Incompressibilidade | 38 |
| 6.4 | Primeira lei da termodinâmica (conservação de energia) | 38 |
| 6.4.1 | 1 lei da termodinâmica para sistemas | 38 |
| 6.4.2 | Potencia | 39 |
| 6.4.3 | Potência das forças externas cisalhantes | 39 |
| 6.4.4 | Trabalho de eixo | 40 |
| 6.4.5 | Equação da primeira lei aplicada à dutos | 40 |
| 6.5 | Quantidade de Movimento | 41 |
| 6.5.1 | Equação Geral da Quantidade de Movimento | 41 |
| 6.5.2 | Caso particular: A força de campo restringe-se apenas à força peso | 41 |
| 6.5.3 | Caso Particular 2: As trajetórias são retilíneas e paralelas em todas as seções de entrada e de saída | 42 |
| 7 | Análise diferencial dos escoamento | 43 |
| 7.1 | Cinemática dos elementos fluidos | 43 |
| 7.1.1 | Translação | 43 |
| 7.1.2 | Deformação linear | 43 |
| 7.1.3 | Rotação e deformação angular | 44 |
| 7.2 | Equação da continuidade na forma diferencial | 45 |
| 7.3 | Conservação da Quantidade de Movimento e as Equações de Navier-Stokes | 45 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 7.3.1 | Equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas | 46 |
| 7.4 | Métodos para resolução do escoamento diferencial | 47 |
| 7.4.1 | DNS - Direct Numerical Simulation | 47 |
| 7.4.2 | Escoamento viscoso entre placas planas | 47 |
| 7.4.3 | Escoamento Couette | 48 |
| 7.4.4 | Escoamento Poiseuille | 48 |
| 7.4.5 | Escoamento em Espaço Anular | 49 |
| 7.4.6 | Escoamento viscoso em superfícies verticais | 50 |
| 8 | Análise dimensional | 51 |
| 8.1 | Teorema de Buckingham π | 52 |
| 8.2 | Adimensionais | 52 |
| 8.2.1 | Número de Reynolds | 53 |
| 8.2.2 | O número de Euler | 54 |
| 8.2.3 | Número de Mach | 54 |
| 8.3 | Modelos e semelhança | 56 |
| 8.3.1 | Teoria dos modelos | 56 |
| 9 | Escoamento viscoso em condutos | 58 |
| 9.1 | Componentes típicos de um sistema de dutos | 58 |
| 9.2 | Regimes de escoamento | 58 |
| 9.3 | Região de Entrada e Escoamento Completamente desenvolvido | 59 |
| 9.3.1 | Velocidade média | 60 |
| 9.3.2 | Perfil de velocidades para um escoamento laminar plenamente desenvolvido | 60 |
| 9.4 | Perda de carga distribuída | 61 |
| 9.4.1 | Fórmula universal de perda de carga de Darcy-Weisbach | 61 |
| 9.4.2 | Escoamento laminar | 61 |
| 9.5 | Equação de Colebrook | 61 |
| 9.5.1 | Lei de Hagen-Poiseuille | 62 |
| 9.5.2 | Tensão de Reynolds: | 62 |
| 9.6 | Perda de carga localizada | 63 |
| 9.6.1 | Comprimento equivalente | 63 |
| 9.7 | Perda de carga total | 64 |
| 9.8 | Equação de energia em um conduto com perda de carga | 64 |
| 9.9 | Linhas de pressão | 64 |
| 9.10 | Camada limite | 65 |
| 9.11 | Exercícios | 66 |
| 9.12 | Equação de Churchill | 66 |
| 10 | Bombas e Turbinas | 67 |
| 10.1 | Máquinas de deslocamento positivo | 67 |
| 10.2 | Turbomáquinas dinâmicas | 68 |
| 10.2.1 | Centrífugas | 68 |
| 10.2.2 | Fluxo misto | 69 |
| 10.2.3 | Axial | 69 |
| 10.3 | Bombas axiais dutadas | 70 |
| 10.4 | Análise dimensional e similaridade | 70 |
| 10.4.1 | Eficiência | 71 |
| 10.4.2 | NPSH - Net Positive Suction Head | 72 |
| 10.4.3 | Rotação ou velocidade específica | 73 |
| 10.4.4 | Comentários | 73 |

1 Introdução

Este é um resumo elaborado por alunos para estudar a matéria de mecânica dos fluidos. Seu propósito é apenas estudar e aprender, não havendo fins lucrativos.

1.1 Princípios governantes

São 4 princípios que representam a generalização de dados experimentais. Nenhum deles pode ser deduzido a partir dos demais.

- Princípio da conservação de massa
- Primeira lei da termodinâmica (princípio da conservação de energia)
- Segunda lei da termodinâmica (irreversibilidade)
- Segunda lei de newton ($F = ma$)

1.2 Grandes problemas a serem resolvidos:

- Turbulência
- Viscosidade
- Configurações complexas
- Navier-Stokes
- Rugosidade

2 Propriedades dos fluidos

2.1 Conceitos básicos

Sólidos: resistem a tensões de tração, as moléculas são pouco espaçadas com forças de coesão intermoleculares fortes e resistem a tensões de cisalhamento.

Fluidos: Não resistem a trações, tensões de cisalhamento e as moléculas são espaçadas com força molecular fraca. Um fluido é uma substância que se **deforma de modo contínuo** quando submetida a uma tensão de cisalhamento de qualquer valor.

O Continuum: Assume-se que os fluidos estão continuamente distribuídos em toda região de interesse e que todo o fluido está no continuum, ou seja, não há "buracos faltando matéria", algo que não se pode garantir em atmosferas rarefeitas, por exemplo. Forças, tensões, todas serão distribuídas continuamente ao longo do sistema.

Este modelo permite resolver problemas sem ter que tratar das interações moleculares diretamente. Elas serão abordadas macroscopicamente como **viscosidade** ou **massa específica**.

Número de Knudsen: É um método de ver se o modelo do continuum é aceitável

$$K_n = \frac{\lambda}{d} \tag{1}$$

Sendo d o comprimento do tubo e λ o livre caminho médio das moléculas.

Se $K_n < 0,001$, o escoamento pode ser considerado no contínuo e valem as leis de mecânica dos fluidos.

Homogeneidade dimensional: Todas as equações devem ser dimensionalmente homogêneas, ou seja, as unidades em ambos os lados da equação serão as mesmas, bem como as unidades de termos aditivos.

Livre caminhos das moléculas: É a distância média ou espaço médio percorrido entre duas colisões sucessivas das moléculas ou de um gás.

2.2 Medidas da Massa e do Peso dos Fluidos

Massa específica: É definida como a massa contida numa unidade de volume. Comumente utilizada para caracterizar a massa de um sistema fluido. Nos gases, ela é fortemente influenciada pela temperatura e pela pressão.

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

Peso específico: É o peso (F^1) do fluido por unidade de volume.

$$\gamma = \rho g = \frac{dm g}{dV}$$

Volume específico

$$V = \frac{1}{\rho}$$

Densidade: É a relação entre a massa específica de uma substância e a massa específica da água. É um número puro (adimensional).

$$SG = \frac{\rho}{\rho_{H_2O 4^\circ C}}$$

Tensão: É a força normalizada pela área. Pode-se ter tração, compressão e cisalhamento, conforme a figura 1.

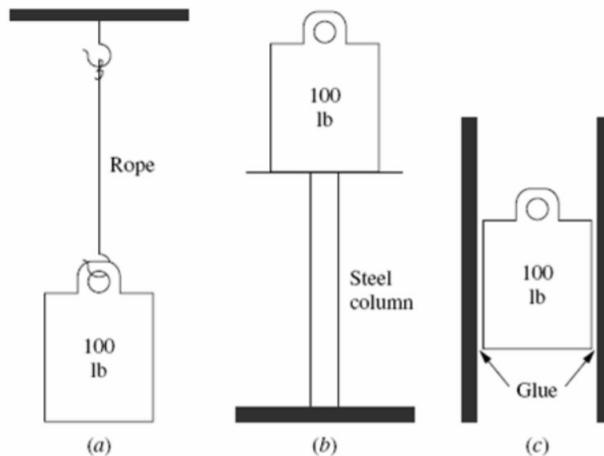


Figure 1: Tipos de tensão

Viscosidade: É a resistência ao se mover uma camada de líquido contra outra. Equivale ao atrito na mecânica dos sólidos. Ela gera perdas de energia no transporte de fluidos em tubulações, basicamente sobre qualquer superfície. Ela varia pouco com a pressão mas muito com a temperatura.

μ = Coeficiente de viscosidade = viscosidade dinâmica = viscosidade absoluta = viscosidade

$$[\mu] = \frac{N \cdot s}{m^2} \text{ ou } [\mu] = Pa \cdot s$$

Viscosidade cinemática: É a relação entre a viscosidade dinâmica e a massa específica. Ela representa a quantidade de tempo necessária para que um volume fixo de óleo escoe por um tubo capilar.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2)$$

$$[\nu] = \frac{m^2}{s} = 10^6 \text{ cSt}$$

Pressão: A pressão em um fluido em repouso é definida como a força normal por unidade de área exercida sob uma superfície plana (real ou imaginária) imersa no fluido e é criada pelo bombardeamento de moléculas de fluido nessa superfície. Definição retirada do livro Munson et al. 2005

2.2.1 Tabela de conversão entre unidades de pressão

| | Kgf/cm ² | lbf/pol ² | BAR | Pol Hg | Pol H ₂ O | ATM | mmHg | mmH ₂ O | kpa |
|----------------------|---------------------|----------------------|---------|---------|----------------------|----------|---------|--------------------|---------|
| Kgf/cm ² | 1 | 14,233 | 0,9807 | 28,96 | 393,83 | 0,9678 | 735,58 | 10003 | 98,0665 |
| lbf/pol ² | 0,0703 | 1 | 0,0689 | 2,036 | 27,689 | 0,068 | 51,71 | 70329 | 6,895 |
| BAR | 1,0197 | 14,504 | 1 | 29,53 | 401,6 | 0,98692 | 750,06 | 10200 | 100 |
| Pol Hg | 0,0345 | 0,4911 | 0,03386 | 1 | 13,599 | 0,0334 | 25,399 | 345,40 | 3,3863 |
| Pol H ₂ O | 0,002537 | 0,03609 | 0,00249 | 0,07348 | 1 | 0,002456 | 1,8665 | 25,399 | 0,24884 |
| ATM | 1,0332 | 14,696 | 1,0133 | 29,921 | 406,933 | 1 | 760,05 | 10335 | 101,325 |
| mmHg | 0,00135 | 0,019337 | 0,00133 | 0,03937 | 0,5354 | 0,001316 | 1 | 13,598 | 0,13332 |
| mmH ₂ O | 0,000099 | 0,00142 | 0,00098 | 0,00289 | 0,03937 | 0,00009 | 0,07353 | 1 | 0,0098 |
| Kpa | 0,010197 | 0,14504 | 0,01 | 0,29539 | 4,0158 | 0,009869 | 7,50062 | 101,998 | 1 |

Figure 2: Tabela de conversão entre unidades de pressão

2.3 Lei de newton da viscosidade

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (3)$$

Onde τ é a tensão de cisalhamento, u é a velocidade e μ a viscosidade dinâmica. Note que a viscosidade dinâmica é o que relaciona a tensão no fluido e a taxa de deformação por cisalhamento (o gradiente de velocidade).

A figura 3 mostra a ocorrência do **princípio da aderência completa**. Este princípio diz que todo fluido tem uma aderência completa na interface com o corpo, onde a velocidade relativa é igual a 0. Devido à viscosidade, é gerado um perfil de velocidades conforme a distância da placa aumenta.

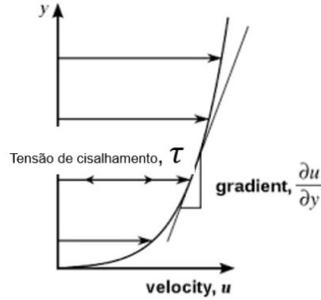


Figure 3: Gradiente da tensão de cisalhamento sob uma superfície

A viscosidade é importante para determinar a vazão de fluidos em dutos e para determinar perdas de energia associadas com transporte de fluidos em dutos e canais.

Sobre Exercícios Para placas paralelas ou placas cilíndricas, próximas entre si, o diagrama de velocidades no escoamento laminar pode ser considerado linear. Isso já facilita pois $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\delta u}{\delta y} = \text{cte}$.

Note também, que a tensão é dada por: $\tau = \mu \frac{du}{dy}$. Multiplicando pela área, obtêm-se a força viscosa.

2.4 Reologia de fluidos Newtonianos e não Newtonianos

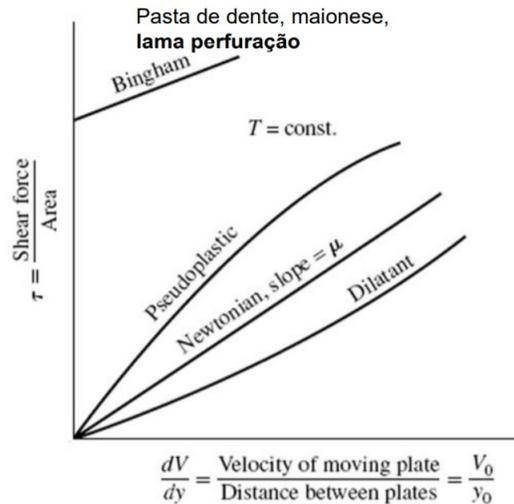


Figure 4: Tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação por cisalhamento.

A inclinação das curvas é dada pela viscosidade aparente (μ_{ap}). Para os fluidos newtonianos, a viscosidade aparente é igual à viscosidade dinâmica: $\mu_{ap} = \mu$.

Fluidos newtonianos: A viscosidade é constante para diferentes taxas de cisalhamento e não varia com o tempo

Fluidos pseudoplásticos: Apresentam uma diminuição da viscosidade aparente com o aumento da tensão de cisalhamento. Exemplo: gel de cabelo.

Fluidos dilatantes: Apresentam um aumento da viscosidade aparente com o aumento da tensão de cisalhamento. Exemplo: Água + Maizena ou Água + Areia (areia movediça).

Fluidos de Bingham: Permanecem indeformados até certa tensão de cisalhamento e, após superar esta tensão, passam a se comportar como um fluido newtoniano. Também são conhecidos como plástico ideal. Exemplo: Barragens.

2.5 Lei dos Gases Perfeitos

Sob certas condições, a massa específica de um gás está relacionada com a pressão e temperatura através da equação:

$$p = \rho RT \quad (4)$$

onde p é a pressão absoluta, ρ é a massa específica, T é a temperatura absoluta e R é a constante do gás.

2.6 Compressibilidade dos Fluidos

Compressibilidade é a mudança em volume devido à mudança de pressão. Um dos modos de representá-la é com o **módulo de elasticidade volumétrico**, este é dado por:

$$E_V = -V \frac{dp}{dV} = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad (5)$$

Onde p é a pressão, V o volume e ρ a densidade. Note que a equivalência é dada pois $m = \rho V$.

O módulo de elasticidade volumétrico indica quão difícil é comprimir um material. Note que o sinal negativo indica que o aumento de pressão resulta em uma diminuição no volume (e, logo, um aumento na massa específica). Normalmente, seu valor é bem alto pois muitos dos fluidos, como ar e água, são incompressíveis. A água, por exemplo, aumentando a pressão em 70atm terá uma redução de apenas 0.3% em seu volume.

Velocidade do Som É a velocidade com que perturbações mecânicas se propagam através do fluido. Isto indica que, caso haja alguma perturbação, por exemplo o fechamento de uma válvula, leva um tempo finito até que seu efeito seja sentido a montante desta.

Ela pode ser definida como:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Assumindo as perturbações com isentrópicas, pois as variações na pressão são pequenas e utilizando a definição do módulo de elasticidade volumétrico, tem-se que:

$$c = \sqrt{\frac{E_V}{\rho}} = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} = \sqrt{kRT}$$

Ou sejam assume-se que os fluidos se comporta como um gás perfeito.

2.7 Tensão superficial

É uma propriedade que resulta de forças atrativas entre as moléculas. Ela faz com que a superfície de um líquido se comporte **como** uma membrana - não se forma nenhuma membrana! Por causa disso, fenômenos como uma agulha boiar na água, um inseto andar sobre ela ou a capilaridade se tornam possíveis.



Figure 5: Mosquito sobre a água sustentado pela tensão superficial

A intensidade da atração molecular por unidade de comprimento é denominada tensão superficial.

$$[\sigma] = \frac{N}{m}$$

A tensão superficial é uma propriedade do líquido que depende da temperatura e do par de fluidos em análise. Note que esse valor irá diminuir com a temperatura já que mede a força da interação molecular.

2.7.1 Capilaridade

É a subida espontânea de um líquido em um tubo fino. É um fenômeno resultante das forças coesivas que aderem à parede do tubo devido na interface sólido-líquido-gás. As moléculas são polarizadas (coesão molecular) e se comportam como pequenos ímãs devido à sua eletronegatividade.

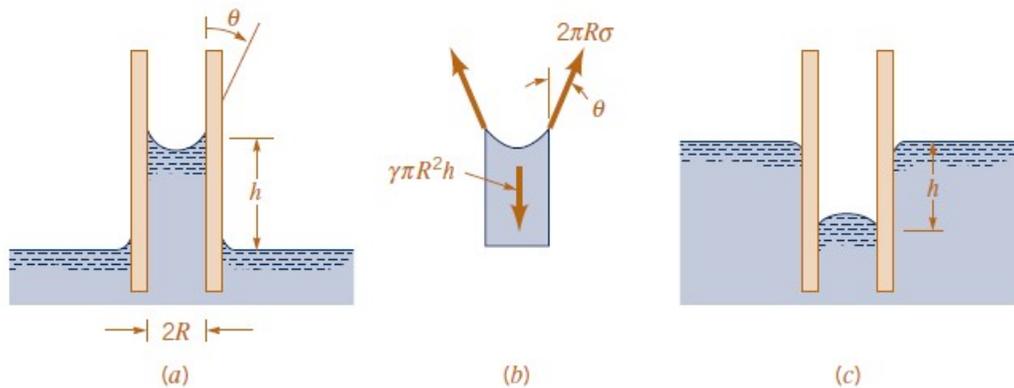


Figure 6: Efeito da capilaridade (Munson 7ª edição)

A atração entre as moléculas do líquido e do sólido é forte o suficiente para se igualar ao peso da moléculas que estão sendo suspensas. Tem-se que a força vertical provocada pela tensão superficial é dada por $2\pi R\cos(\theta)$ e a força atuante sobre a massa de líquido é $\gamma\pi R^2h$. Igualando ambas, tem-se que:

$$h = \frac{2\sigma\cos(\theta)}{\gamma R} \quad (6)$$

Este equacionamento mostra o efeito da dimensão do raio do tubo na capilaridade. Por essa razão que, quanto menor o raio, mais o fluido avança (ou recua) sobre a superfície. Os casos em que os fluidos recoam são aqueles para qual a tensão superficial é fraca. Nestes, $\theta > 90^\circ$.

2.8 Pressão de Vapor

É a pressão na qual um líquido entra em ebulição (evapora) a uma dada temperatura. Quando P_{VP} supera a pressão total aplicada na superfície, o líquido evapora.

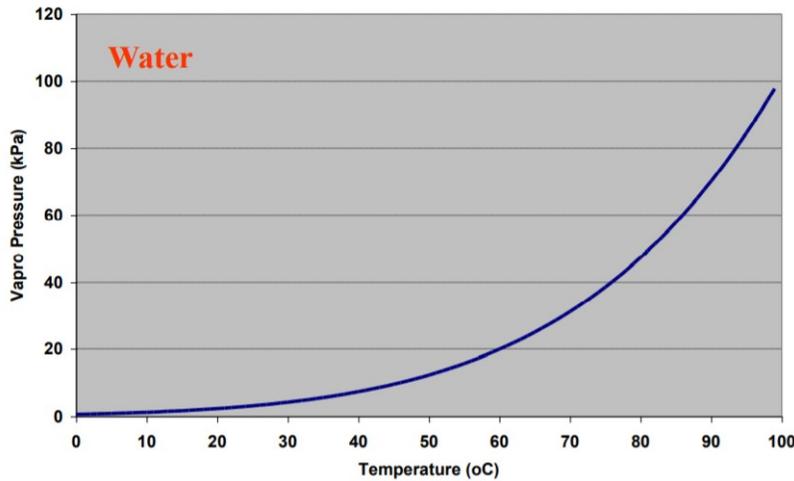


Figure 7: Pressão de vapor da água em função da temperatura

Note que o aumento de temperatura faz com que um líquido atinja uma pressão de vapor suficiente para ebulir, todavia, a ebulição acontece porque a pressão necessária foi atingida, e não porque o líquido está quente ou frio.

2.9 Cavitação

Cavitação é o processo de nucleação, crescimento e colapso de bolhas de vapor em um fluido. Ao colapsar, são geradas ondas de choque - emissão de energia de forma quase instantânea - de até $1000MPa$, o suficiente para exceder o limite de escoamento de vários materiais. A repetição deste efeito sobre uma superfície vai criando micro-trincas e, com tempo suficiente, causa falhas na superfície. Por vezes, é forte o suficiente para arrancar pedaços de uma turbina de aço.



Figure 8: Imagem de uma turbina danificada pelo efeito de cavitação

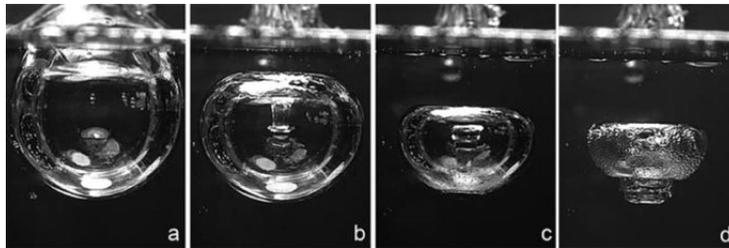


Figure 9: Imagem passo a passo do fenômeno de cavitação

Este é um fenômeno físico pertinente apenas à substâncias na fase líquida. Ele provoca redução na eficiência dos equipamentos e está associado à três principais efeitos: geração de ruído, vibrações e erosão.

Um exemplo em que isso acontece é quando há zonas de estreitamento em tubulações, por exemplo, por uma válvula ou uma redução no diâmetro. Pelo princípio de conservação da massa e considerando também que a água é incompressível, naturalmente haverá um aumento de velocidade para que a vazão seja mantida. Todavia, há uma segunda limitação imposta pela equação de Bernoulli.

$$\frac{V_1}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + Z_1 = \frac{V_2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + Z_2 \quad (7)$$

Onde V é a velocidade. A partir dela conclui-se que, para compensar o aumento da velocidade, deverá haver, no ponto, uma queda de pressão local. Se a queda for grande o suficiente, haverá a formação de bolhas mas, assim que se passar pelo ponto de baixa pressão, a pressão voltará a ficar superior à pressão de vapor do líquido. Uma vez que isto ocorre, as bolhas irão implodir, ocorrendo cavitação. O fenômeno em específico causado por zonas de estreitamento é conhecido como **efeito de Venturi**.

Quando o colapso ocorre muito próximo à uma superfície sólida, a interferência da superfície faz com que a aceleração da bolha para o interior de um dos lados é maior do que do outro - pense como a parede segurando a parte de baixo (princípio da aderência completa). Com isso, é formado um micro-jato de alta velocidade incidindo na superfície, observe a figura 11.

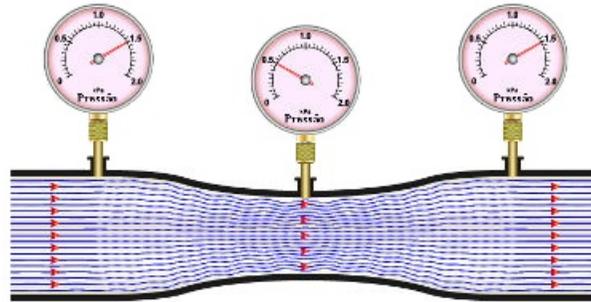


Figure 10: Efeito de Venturi

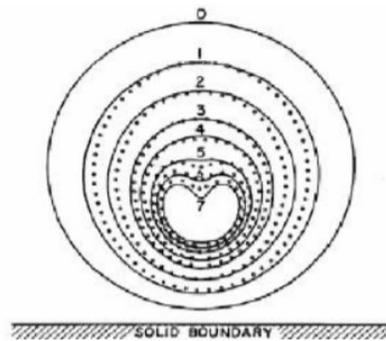


Figure 11: Desenvolvimento do colapso e do micro-jato (Brennen, 1995)

linhas de emissão, linhas de corrente e linhas de trajetória.

3 Estática dos Fluidos

3.1 Conceitos de tensão e definição de pressão

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (8)$$

Existem três tipos:

- Tensão normal de compressão (ou simplesmente pressão)
- Tensão normal de tração (algo avançado, não veremos)
- Tensão tangencial de cisalhamento

A pressão é uma grandeza escalar. Ela representa a tensão normal de compressão

- Se o fluido está em repouso: p
- Se o fluido está em movimento

3.2 Lei de Pascal

A pressão num ponto de um fluido em repouso, ou em um movimento onde não existem tensões de cisalhamento, é independente da direção. Ou seja, independente do plano que você escolha, a força de pressão não irá depender da direção de alicação - para "cima", "baixo", "diagonal". Na figura 12, tem-se que $p_x = p_y = p_s$.

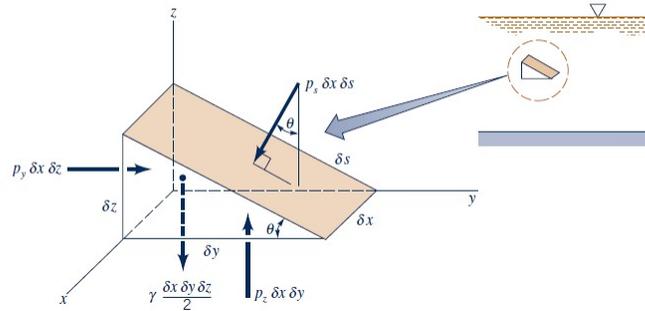


Figure 12: Pressão de um fluido em repouso em um ponto arbitrário com formato de cunha. Fonte: (Munson et al. 2005).

3.3 Equação básica do campo de pressão

$$\vec{\nabla} p - \gamma \vec{k} = \rho \vec{a} \quad (9)$$

A equação é a segunda lei de Newton, escrita de modo conveniente para a mecânica dos fluidos. Ela é válida nos casos em que as tensões de cisalhamento no fluido são nulas.

É possível deduzí-la utilizando a expansão em série de Taylor da pressão média nas superfícies de um cubo - um cubo pois todas suas faces são paralelas aos planos xy , xz e yz .

3.4 Equação fundamental da estática dos fluidos

Na condição de repouso não há aceleração: $\vec{a} = 0$. Logo, a equação 9 fica:

$$-\vec{\nabla} p - \gamma \vec{k} = 0 \quad (10)$$

É, então, possível concluir que:

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \quad (11)$$

Note que o valor negativo de γ se deve à orientação da gravidade. Quando se diminui a altitude, por exemplo, a pressão atmosférica aumenta e, quando se eleva a altitude, a pressão diminui.

3.4.1 Variação da pressão atmosférica

Defini-se a pressão atmosférica padrão a 0m do nível do mar e a $15^\circ C$. Ao elevar a altitude, a temperatura diminui constantemente até aproximadamente $-56.5^\circ C$, otem tem uma faixa de cerca de 10km de temperatura constante - essa é a zona de voo dos aviões.

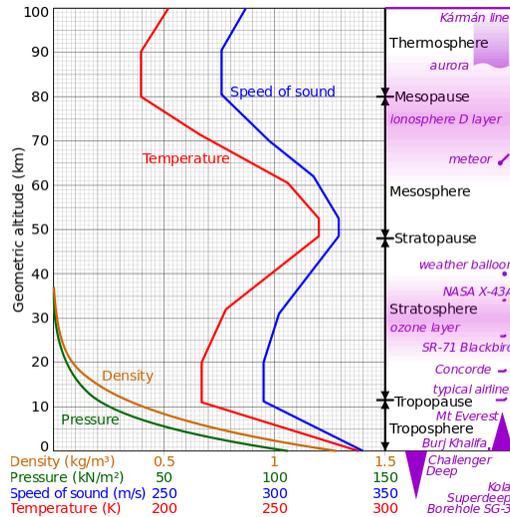


Figure 13: Curva de pressão, temperatura, densidade e velocidade do som com a altitude

A segunda curva na imagem 13 é a das pressões com as altitudes. Observe que o peso específico varia com a altitude e que essa variação é extremamente semelhante à variação da pressão - como prevê a equação 11. A gravidade não é constante ao longo da altitude também - apesar de ser algo desprezível na maior parte das aplicações de engenharia.

3.4.2 Cálculos práticos para fluidos incompressíveis

A equação 11 estabelece que a variação de pressão com a altitude é proporcional à γ . Deste, é possível manipular a equação de modo que:

$$dp = -\gamma dz$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$\Delta p = -\Delta z$$

Finalmente, assumindo z_1 como 0, tem-se que a diferença de pressão em 2 pontos pode ser escrita como:

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \quad (12)$$

Onde h é a distância vertical entre os dois pontos. Usar a superfície de separação entre líquidos pode ser um bom ponto para definir como origem das medidas das pressões.

Para fluidos compressíveis é preciso levar em consideração a variação da massa específica e, muitas vezes, da temperatura também. É possível encontrar a formulação na seção 2.3.2 do livro do

Munson .

3.5 Medidores de pressão

- Piezômetro
- Barômetro
- Manômetro

3.5.1 Principais Manômetros

- Manômetro piezométrico

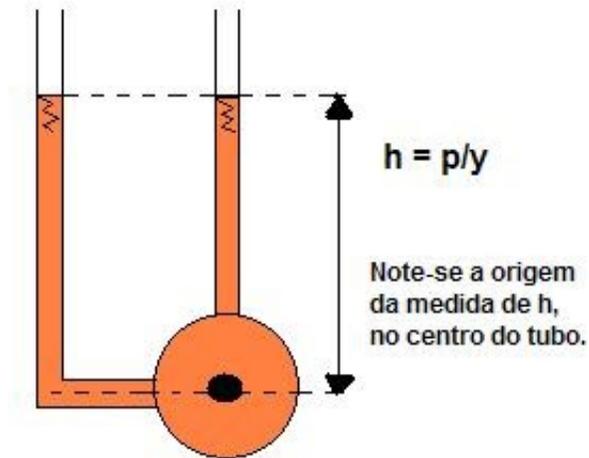


Figure 14: Ilustração de um manômetro piezométrico

- Tubo em U

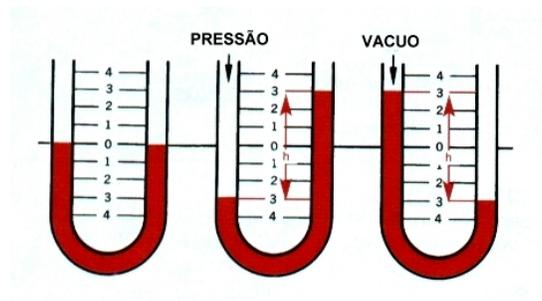


Figure 15: Ilustração de um manômetro em U

- Manômetro inclinado

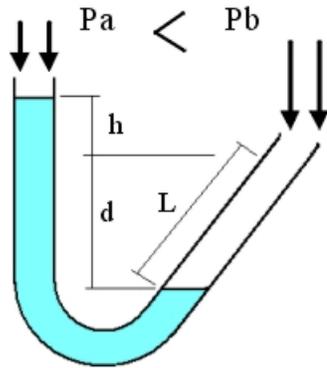


Figure 16: Ilustração de um manômetro inclinado

- Manômetro metálico ou de Bordon

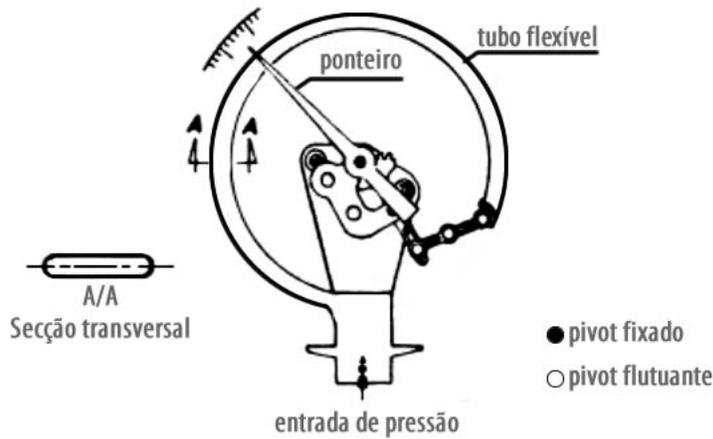


Figure 17: Ilustração de um manômetro metálico

Em geral, assume-se que a pressão do ar é constante em exercícios em manômetros fechados.

3.5.2 Trabalhando com a pressão

É comum se pensar que a pressão é medida a partir de um referencial absoluto (por exemplo, $0K$ no caso da temperatura). Todavia, em grande parte dos casos, o importante é a diferença de pressão entre dois pontos e não seu valor absoluto (por exemplo, o uso de $-273^{\circ}C$ no lugar do $0K$).

A figura 18 ilustra este tratamento. É chamada de pressão absoluta aquela medida em relação ao vácuo total - análoga à medida em graus Kelvin. A segunda é a pressão relativa - análoga à medida em graus Célsius. Basicamente, assume-se uma variação da pressão em relação à um ponto de referência.

Uma abordagem muito comum, por exemplo, é definir a pressão como atmosférica local como 0. Deste modo, uma pressão mais baixa - é tratada como uma pressão negativa.

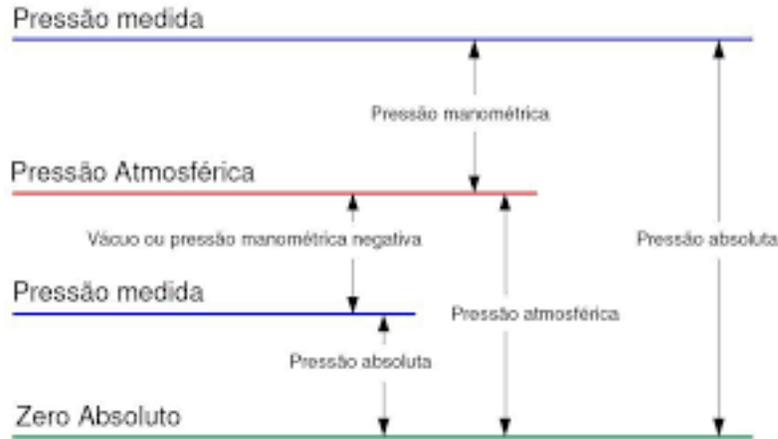


Figure 18: Representação gráfica das pressões relativas e absolutas

3.5.3 Medidas de pressão

A primeira e mais comum é a unidade de F/A , sendo o pascal no SI: $1Pa = 1\frac{N}{m^2}$ ou no sistema Britânico o psi, dado em $\frac{lbf}{in^2}$. No SI, $1atm \approx 10^5 Pa$.

Outro modo é especificá-la em função da altura de uma coluna de líquido, em geral, mercúrio. Neste sistema, 1 atmosfera padrão equivale à 760 mm Hg.

3.6 Força hidrostática sob uma superfície plana

Os fluidos, devido às características da pressão, exercem uma força perpendicular à superfície que está imersa nele. Outra característica é que a pressão, para fluidos incompressíveis, cresce linearmente com o aumento da profundidade. Muitas vezes será utilizada a fórmula $p = \gamma h$ para calcular a pressão. Utiliza-se a formulação do empuxo. Tem-se que:

$$F = \int_A p \times dS = \int_A \gamma h dA = \int_A \gamma y \sin(\theta) dA \quad (13)$$

É possível reescrever a força como:

$$F_R = \gamma h_c A \quad (14)$$

Onde h_c é a altura do centróide da área e A a área. Mais fácil de manusear.

Existem alguns modos para encontrar o centro de pressão. O primeiro é assumir que a força estará aplicada no baricentro do campo de tensões - se for um triângulo, por exemplo, será $\frac{h}{3}$ medido da parte mais baixa. Este é o método também conhecido como prisma de pressões, e é extremamente conveniente para geometrias simples. A imagem 19 ilustra o porque da origem deste nome.

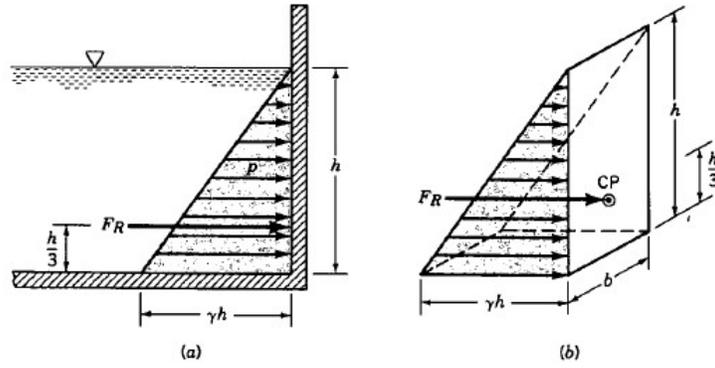


Figure 19: Prisma de pressão

O outro modo é utilizar duas fórmulas sugeridas no Munson et al. 2005:

$$y_r = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c \quad x_r = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c \quad (15)$$

Onde x_c e y_c são as coordenadas do centróide e I_{xc} e I_{xyc} são os momentos de inércia das figuras formadas.

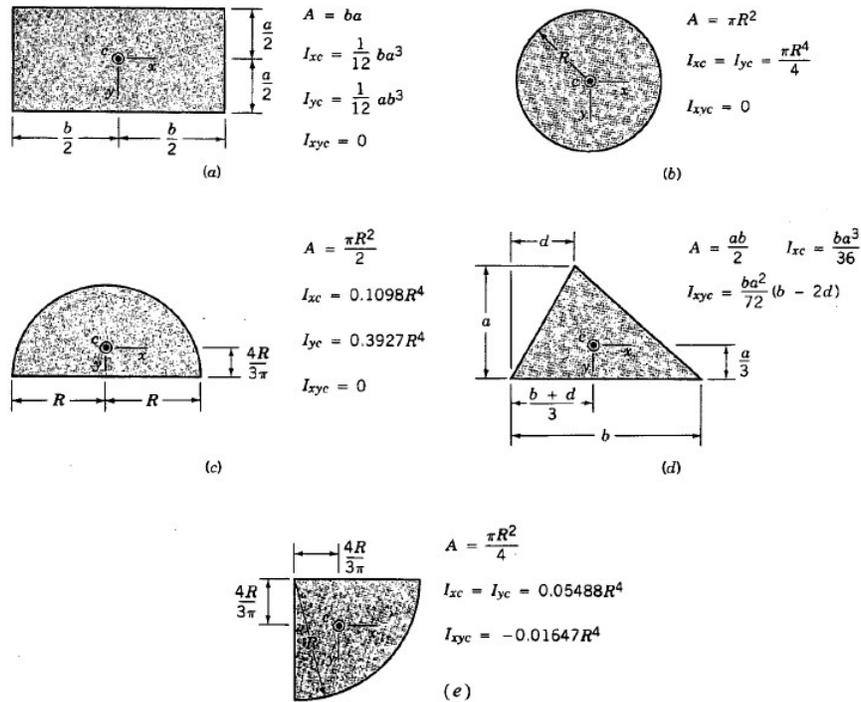


Figure 20: Propriedades geométricas de algumas figuras

3.6.1 Barragem de gravidade

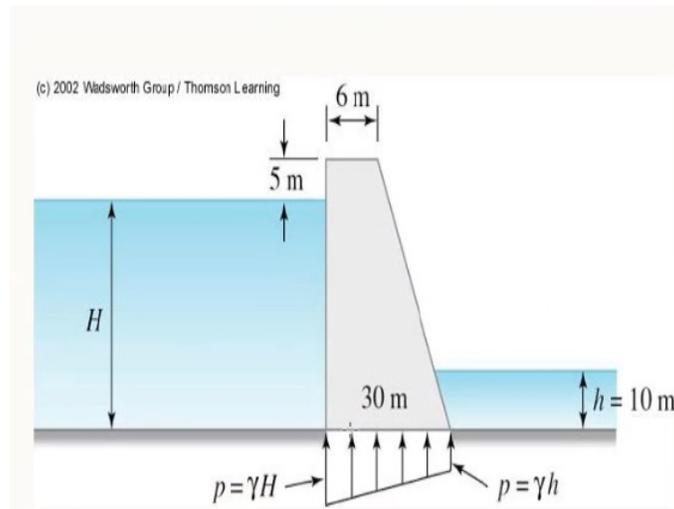


Figure 21: Esquema de uma barragem de gravidade

A geometria da barragem trapezoidal é modelada de modo que apenas o peso da barragem e as forças de pressão da água à jusante e a montante, junto com o peso da própria barragem, são feitas de modo que o somatório dos momentos em qualquer ponto é 0.

$$\sigma_{\lambda}^2 = \sigma_a^2 + \sin(\theta)^2 \sigma_b + b^2 \sigma_{sen(\theta)}$$

3.6.2 Efeito da pressão atmosféricas

Por fim, é importante comentar que a pressão atmosférica costuma possuir resultante nula nos exercícios abordados. A figura 22 ilustra este fato. Note que, para tanques pressurizados por exemplo, este resultado já não é válido.

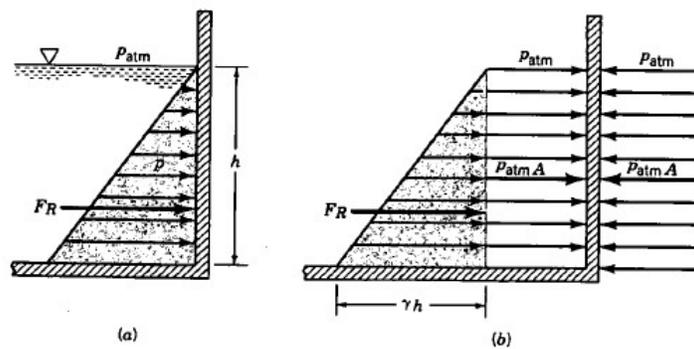


Figure 22: Efeito da pressão atmosférica sob uma superfície plana

4 Cinemática

4.1 O campo de escoamento e de velocidades

É a representação dos parâmetros do fluido em função das coordenadas espaciais e do tempo. Uma de duas variáveis mais importantes é o campo de velocidades, dado por:

$$V = u(x, y, z, t) \vec{i} + v(x, y, z, t) \vec{j} + w(x, y, z, t) \vec{k} \quad (16)$$

Onde u , v e w são os componentes do vetor velocidade nas direções x , y e z .

4.2 Classificação dos escoamentos

Os escoamentos reais, a rigor, são todos **tridimensionais**, precisando de três coordenadas para descrevê-los.

$$V = u(x, y, z, t) \vec{i} + v(x, y, z, t) \vec{j} + w(x, y, z, t) \vec{k}$$

Mas, é muito comum que algumas componentes possuam valores desprezíveis em relação às demais, de modo que é possível modelá-los como **bidimensionais**:

$$V = u(x, y, z, t) \vec{i} + v(x, y, z, t) \vec{j}$$

Ou até mesmo **unidimensionais**

$$V = u(x, y, z, t) \vec{i}$$

A vantagem de tais modelos é que, mesmo com as enormes simplificações, ainda é possível obter bons resultados.

4.2.1 Compressibilidade

O fluido é considerado incompressível quando o número de Mach é menor que 0,3. Ou seja, em condições ambientes, significa que as equações da mecânica dos fluidos são válidas até velocidades de $100 \frac{m}{s}$. O divergente do campo de velocidades é diferente de 0. Assumir incompressibilidade é também assumir $\nabla \cdot \vec{V} = 0$.

4.2.2 Movimento de rotação

Rotacional A maioria das partículas desloca-se animada de velocidade angular em torno do centro de massa o rotacional no campo de velocidades é diferente de 0.

Irrotacional As partículas deslocam-se sem exibir movimento de rotação.

4.3 Regimes de escoamento

4.3.1 Regime permanente

Regime em que a velocidade e a pressão num determinado ponto não variam com o tempo. Estas podem variar de um ponto para outro, mas em cada ponto são fixas. No escoamento permanente, a corrente fluida é dita "estável".

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0; \frac{\partial p}{\partial t} = 0;$$

Por exemplo, um reservatório com o nível de água caindo é considerado permanente se a queda de água tiver um impacto desprezível na velocidade com que o nível de água diminui. É importante notar que o regime permanente é aplicado a pontos fixos, mas os parâmetros de uma partícula podem variar de um ponto para outro. No topo do reservatório a velocidade é uma, na saída a velocidade é outra. E ainda assim considera-se um regime permanente.

4.3.2 Regime transiente

Laminar As partículas descrevem trajetórias paralelas e suaves. A viscosidade amortece qualquer tendência de rotação; $Re < 2000$.

Escoamento turbulento AS trajetórias são erráticas e sua previsão é "impossível". A turbulência gera queda de pressão

Transição O escoamento laminar tem um perfil parabólico, o turbulento tem uma forma log-linear ou perfil de potência a transição de um para o outro ocorre de forma gradual com $2000 < Re < 2400$ - figura 23 (b).

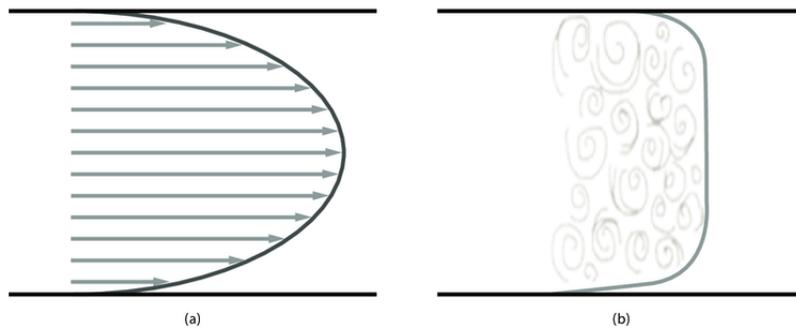


Figure 23: Perfil de velocidades de um escoamento laminar versus um turbulento

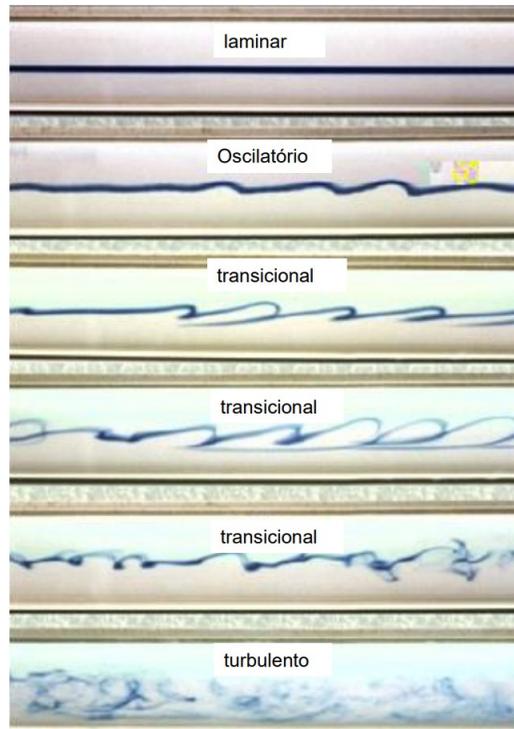


Figure 24: Variação do regime de escoamento com o crescimento do número de Reynolds

4.4 Linhas de corrente, emissão e trajetória

4.4.1 Linhas de corrente

São linhas tangentes à direção do escoamento - tangentes ao campo de velocidades - em cada ponto do campo de escoamento, em um dado instante. São muito utilizadas em trabalhos analíticos. De modo geral, são métodos para facilitar a visualização dos escoamentos e a análise de seus campos. Duas linhas de corrente não podem se interceptar (o ponto teria duas velocidades).

O tempo **não é variável** na equação da linha de corrente, já que o conceito se refere à um determinado instante. Para escoamento bidimensionais, a inclinação da linha de corrente é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (17)$$

Esta equação pode ser integrada e fornecer as equações das linhas de corrente (desde que o campo seja dado em função de x e y , e t caso ele seja transitório).

Um problema comum é precisar substituir u e v na equação das linhas de corrente e integrá-la, encontrando uma relação entre x e y . As constantes de integração costuma ser substituídas por Ψ , resultando em algo como:

$$\Psi = xy$$

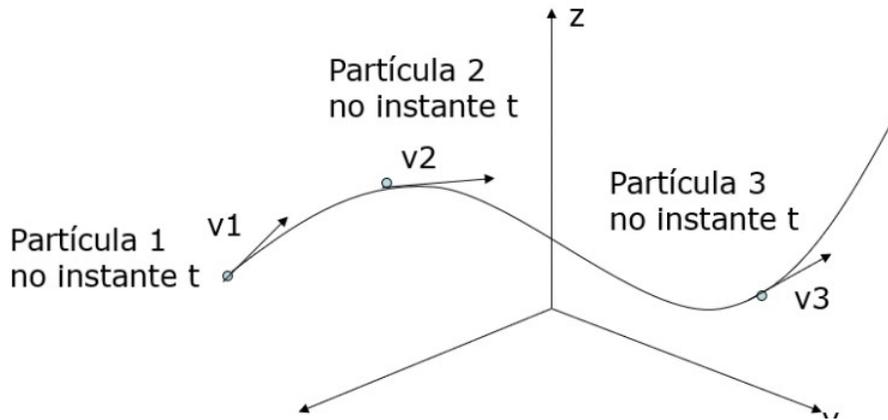


Figure 25: Imagem das linhas de corrente

4.4.2 Linhas de Emissão

São o lugar geométrico, em um determinado instante, de todas as partículas que passaram por um dado ponto no espaço em um dado instante passado.

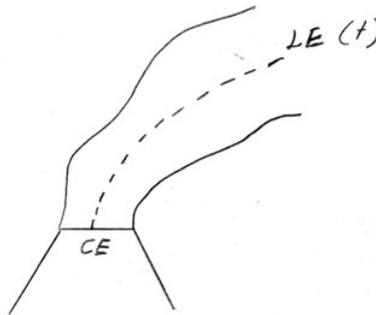


Figure 26: Desenho de linhas de emissão

4.4.3 Linhas de trajetória

É o lugar geométrico dos pontos ocupados por uma dada partícula ao longo de seu escoamento. Muito utilizadas em trabalhos experimentais. Muito utilizadas em trabalhos experimentais.

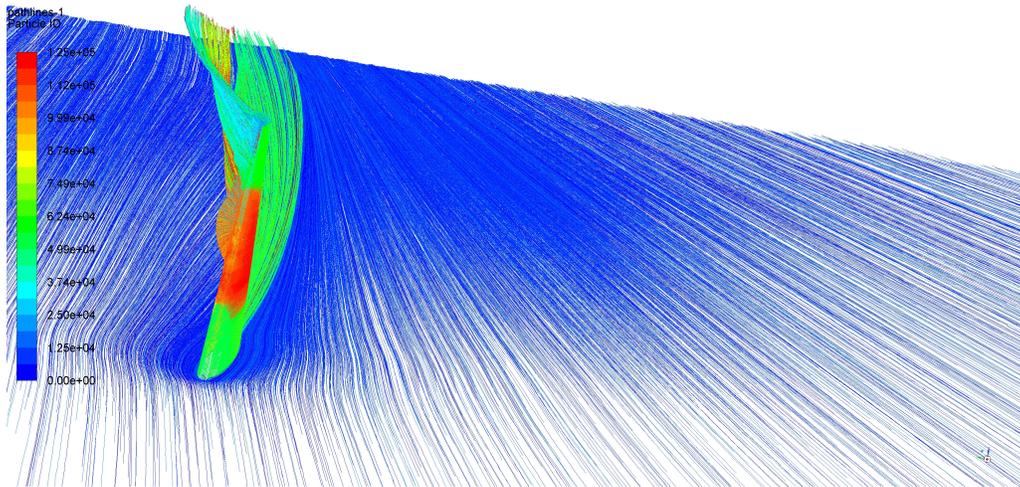


Figure 27: Imagem de linhas de trajetória obtidas por simulação numérica

Pode ser obtida através da integral no tempo da velocidade de uma partícula. Logo se uma partícula tem a velocidade descrita por:

$$v = At\vec{x} + A\vec{y}$$

A trajetória é dada por

$$p(t) = \int v(t)dt$$

Geralmente tiraremos a trajetória a partir de uma equação diferencial para cada dimensão do escoamento. Exemplo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t}$$

Integrando a expressão acima teremos a equação de trajetória para a partícula em x.

4.4.4 Linhas de tempo

São o o lugar geométrico, em um determinado instante, de um conjunto de partículas que formava uma linha num dado instante passado.

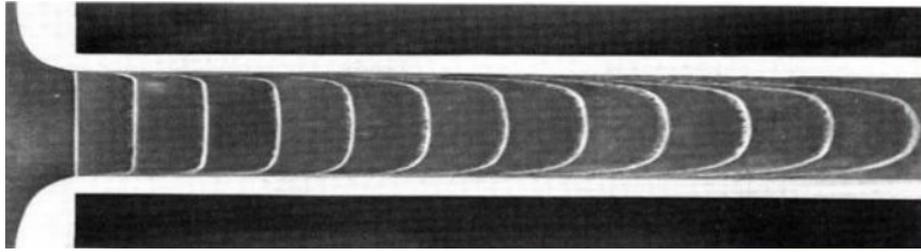


Figure 28: Exemplo de linhas de tempo

4.5 Vazão (Q)

A vazão é a taxa com que um fluido atravessa uma superfície, para fluidos incompressíveis, sua taxa deve-se manter contante ao longo de toda a trajetória. Ela é definida como:

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = V \cdot S \quad (18)$$

Nos sólidos, a velocidade dos corpos é dada em função de um referencial. As leis da física descrevem sistemas usando

Nos fluidos, a velocidade é dada em função da posição, em um instante.

4.5.1 Vazão mássica (\dot{m})

É a quantidade de massa que atravessa uma superfície.

$$\dot{m} = \int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (19)$$

$$[\dot{m}] = \frac{[M]}{[T]}$$

4.6 Descrição dos escoamentos e aceleração

4.6.1 Método Euleriano ou Variação Local

A primeira forma possível de descrever um problema físico é pelo método Euleriano. Nele, o fluido é descrito por uma apresentação completa de todos os parâmetros apresentados - pressão, massa específica e velocidade, por exemplo - descritos em função da posição e do tempo. A partir dele, é possível obter informações sobre o escoamento de fluido enquanto este passa por pontos fixos no espaço. Utiliza-se o **volume de controle**, analisando o que passa por este volume e suas fronteiras.

Matematicamente a definição do método de **Euler** é dada pelo seguinte limite

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{G(P, t) - G(P, t_0)}{t - t_0} \quad (20)$$

É possível imaginar que seria como a comparação de dados de um mesmo sensor com uma posição fixa, em dois instantes de tempos diferentes.

4.6.2 A aceleração

Tratando-se da aceleração, ao invés de descrevê-la como na mecânica dos corpos rígidos (modo adotado pelo método de Lagrange), ela será descrita como um campo de acelerações, derivado do campo de velocidades $V = V(x, y, z, t)$. Disto, aplicando a regra da cadeia, segue que:

$$a(t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \quad (21)$$

Suas componentes escalares podem ser descritas como:

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y(t) &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z(t) &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

A derivada da aceleração é chamada de derivada material ou substantiva, sendo composta pela aceleração temporal mais uma aceleração convectiva. Essa aceleração é muito presente, por exemplo, quando há um afunilamento na seção transversal. Devido à conservação de massa, deve haver uma aceleração (que surge da parcela convectiva).

4.6.3 Método Lagrangeano ou Variação Material

Este baseia-se em seguir as partículas fluidas e determinar suas propriedades durante o movimento. As partículas são descritas em função do tempo ao longo da trajetória

Por exemplo, se quiser se analisar a fumaça saindo de uma chaminé, o método Euleriano mediria a temperatura na saída da chaminé (um ponto fixo analisando várias partículas), o Lagrangeano mediria a temperatura de uma única partícula, mas ao longo de "toda" sua vida. Note que, com informações suficientes, é possível alternar entre os dois.

A definição matemática do método de Lagrange é dada como:

$$\frac{dG}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{G(P, t) - G(P_0, t_0)}{t - t_0} \quad (22)$$

Onde qualquer grandeza física pode ser colocada no lugar do G, ela é escolhida conforme a conveniência. Neste caso, podemos pensar que são comparações de dados de um sensor que esta fixo à uma partícula em instantes de tempo diferentes

4.6.4 Derivada Material

Quando desejamos realizar o cálculo de $\frac{d\vec{V}}{dt}$ temos que levar em conta a parcela convectiva.

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{G} \quad (23)$$

Onde G pode ser qualquer grandeza física (velocidade, temperatura, pressão, etc.). Em um regime permanente, por exemplo, é possível que a aceleração local seja diferente de 0 mesmo que em cada

ponto a velocidade não varie com o tempo. Isso ocorre pois o regime impõe apenas que as grandezas não variem com o tempo, mas elas variam com a posição. Essa variação é justamente a segunda parcela do lado direito da equação acima, que é chamada de **derivada convectiva**, ela representa a variação do campo em estudo com a posição.

Relembrando de cálculo, o operador ∇ é referente ao gradiente do vetor analisado, portanto sua definição matemática é

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

Todas as componentes parciais são aplicadas em cada componente de G separadamente, de modo que, se $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$:

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \left[V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right] \vec{i} + \left[V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right] \vec{j} + \left[V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] \vec{k} \quad (24)$$

Essa operação costuma causar um pouco de confusão, confira os exercícios da apostila para entender melhor.

5 Dinâmica dos Fluidos Elementar e a Equação de Bernoulli

5.1 A segunda lei de Newton

5.1.1 Fluido perfeito

É um fluido hipotético que é incompressível e inviscido (sem viscosidade e, logo, sem condutibilidade térmica). Objetiva-se obter um modelo simplificado para fluidos com baixa viscosidade, desprezando estes efeitos. As partículas não se atritam entre elas, assume-se que elas escorregam entre si, o que vai contra a lei de newton para a viscosidade (2.3) - mas o ganho computacional compensa o erro.

5.1.2 O movimento

Em geral, o movimento das partículas fluidas é tridimensional e transitório (que muda com o tempo), de modo que é necessário um sistema de três coordenadas espaciais para descrevê-lo. O uso das coordenadas cartesianas (x, y, z) e cilíndricas (r, θ, z) são opções naturalmente. Em exercícios, geralmente será assumido que o regime é permanente, portanto, que não varia com o tempo. Mas cuidado, não é porque não há variação com o tempo que a velocidade dos pontos do escoamento são os mesmos - a aceleração que descreve essa mudança é chamada de aceleração convectiva, estudada no capítulo 4.

Tratando-se de movimento, é natural pensar na aceleração como a derivada temporal da velocidade ($a = \frac{dV}{dt}$), o que felizmente se mantém na dinâmica dos fluidos. Note que tanto a velocidade como a aceleração possuem direção e sentido, portanto, são vetores. Para o regime permanente, o vetor velocidade é sempre tangente à trajetória - como consequência, as linhas de corrente e de trajetória são as mesmas, o que é muito bom pois se torna possível descrever o movimento a partir das linhas de corrente.

Muitas vezes os escoamentos descrevem trajetórias curvas, de modo que faz-se necessária uma componente normal à linha de trajetória, a chamada aceleração centrípeta. Para escoamentos bidimensionais,

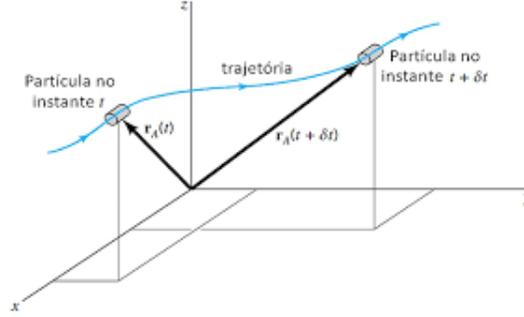


Figure 29: Trajetória de uma partícula

a aceleração pode ser dividida entre a componente tangencial à linha de corrente, que descreve a velocidade da partícula, e uma componente normal - a aceleração centrípeta - que descreve a curva que a partícula fluida faz. Tudo muito semelhante à mecânica dos sólidos. Com isso em mente, tem-se que:

$$a_t = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = V \frac{\partial V}{\partial s} \quad (25)$$

$$a_n = \frac{V^2}{R} \quad (26)$$

Onde R é o raio da curvatura local da linha de corrente. $\frac{\partial V}{\partial s} \neq 0$ significa que **a velocidade da partícula muda ao longo da trajetória** - lembre-se que estamos falando do regime permanente onde a velocidade nos **pontos** é constante.

Por fim, como gerar e como calcular essa aceleração? Felizmente, não será necessário realizar um diagrama de corpo livre para cada umas das 10^∞ partículas, o resultado desse diagrama é resumido na equação de Euler, que é a origem da equação de Bernoulli.

5.2 Equação de Euler

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} \quad (27)$$

O fluido se move devido à **diferença de pressão** e devido ao **campo gravitacional**. É possível movê-lo com campos elétricos e magnéticos, mas são estudos mais avançados. Quando o gradiente de pressão é adverso ($\frac{\partial p}{\partial s}$ é negativo), o fluido acelera. Na direção que o fluido anda, a pressão tem que diminuir para o fluido acelerar. "O fluido caminha na direção em que a pressão cai". Note que o gradiente de pressão é negativo, ou seja, a a diferença de pressão deve ser negativa para vencer a gravidade (que também é negativa). A parte não intuitiva é que, mesmo sem variação temporal da velocidade, pode haver aceleração devido à parcela convectiva $V_s \frac{\partial V_s}{\partial s}$.

Em curvas, a aceleração convectiva é a aceleração centrípeta.

Integrando a equação de Euler e assumindo que o fluido é incompressível, chega-se à equação de Bernoulli

5.3 Equação de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = Cte \quad \left[\frac{J}{kg} \right] \quad (28)$$

Todavia, não saia por ai utilizando a Equação de Bernoulli, ela é um **caso específico** do equacionamento de Euler, portanto há hipóteses que devem ser obedecidas em ordem deste equacionamento ser preciso.

- O fluido é considerado invíscido, isto é, sua viscosidade é negligenciável.
- No regime analisado, o fluido é considerado **incompressível**, portanto, para velocidades altas não pode-se utilizar a Equação de Bernoulli sem devido tratamento ($Mach > 0.3$)
- Assume-se a condição de regime permanente
- O escoamento tem que se dar ao longo de uma única linha de corrente
- A energia se mantém constante em uma linha de corrente. Isto é, não há nenhum trabalho sendo realizado no fluido, nem positivo nem negativo.
- Deve haver ausência de troca de calor ao longo da linha de corrente

Ou seja, o regime deve ser permanente e sem interferências externas; se houver uma bomba d'água ou mudança de temperatura, não é possível utilizá-la. A interpretação física é a manutenção da energia contida no fluido, ela pode alterar de uma para a outra (como da energia cinética para a potencial), mas seu valor se mantém constante. Note que não é preciso de grandes detalhes para utilizar a equação de Bernoulli, mas sim apenas das condições de contorno (velocidade inicial e final, posição inicial e final, pressão inicial e final).

O termo de elevação, z , está relacionado à energia potencial da partícula e é chamado de carga de elevação. O termo de pressão, $\frac{p}{\gamma}$, é denominado carga de pressão e representa o peso de uma coluna de líquido necessária para produzir a pressão p . O termo de velocidade $\frac{V^2}{2g}$, é a carga de velocidade e representa a distância vertical necessária para que o fluido acelere do repouso até a velocidade V numa queda livre (desprezando o atrito). A equação de Bernoulli estabelece que a soma das cargas de pressão, velocidade e elevação é constante ao longo da linha de corrente - extraído do Munson et al. 2005.

A figura 30 é um exemplo de como os tipos de energia são convertidos entre si ao longo de um movimento.

GIVEN Consider the flow of water from the syringe shown in Fig. E3.4a. As indicated in Fig. E3.4b, a force, F , applied to the

plunger will produce a pressure greater than atmospheric at point (1) within the syringe. The water flows from the needle, point (2), with relatively high velocity and coasts up to point (3) at the top of its trajectory.

FIND Discuss the energy of the fluid at points (1), (2), and (3) by using the Bernoulli equation.

| Point | Energy Type | | |
|-------|-------------------------|-------------------------|-----------------|
| | Kinetic $\rho V^2/2$ | Potential γz | Pressure p |
| 1 | Small | Zero | Large |
| 2 | Large | Small | Zero |
| 3 | Zero | Large | Zero |

The figure consists of two parts, (a) and (b). Part (a) shows a syringe with a plunger at the bottom and a needle at the top. Part (b) shows the same syringe with a force F applied to the plunger, causing water to flow out of the needle at point (2) and follow a parabolic trajectory to point (3) at the top of its path. A downward arrow labeled g indicates the direction of gravity.

Figure 30: As energias da equação de Bernoulli. Fonte: Munson et al. 2005

5.3.1 Em exercícios

Uma segunda equação que interage bastante com a de Bernoulli é a conservação de massa. Como por hipótese tem-se que o fluido é incompressível, segue que a vazão é também constante. Portanto:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

Isso implica também, por exemplo, que caso massa seja extraída, a velocidade no conduto deve cair.

5.4 Pressão Estática, Dinâmica e de Estagnação

Outro modo de escrever a equação de Bernoulli é:

$$p + \rho g z + \frac{\rho V^2}{2} = Cte \text{ [Pa]} \quad (29)$$

Disto, é possível avaliar cada um dos termos da equação como uma pressão. Relembrando: Pressão é a tensão normal de compressão

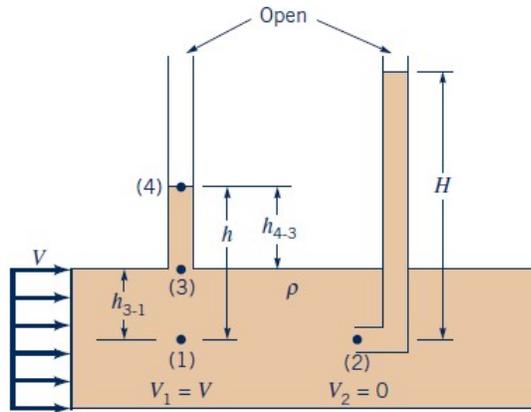


Figure 31: Medindo a pressão estática e dinâmica Fonte: Munson et al. 2005

5.4.1 Pressão Estática ou Termodinâmica

É o termo p da equação 29, que mede a agitação das moléculas internas do fluido. Caso você esteja se movendo com a velocidade do fluido, essa é a pressão que você irá sentir.

Alguns fluidos à mesma temperatura irão possuir pressão estática maiores ou menores. Ela possui direção de atuação normal às paredes da superfície que contem o fluido. Para medi-la, é preciso utilizar um manômetro instalado normalmente à linha de corrente, como no ponto 3 da figura 31.

5.4.2 Pressão Hidrostática

É o termo $\rho g z$ da equação 29, velha conhecida das aulas de laboratório, regida pela lei de Stevin. Representa a variação potencial da pressão com uma elevação, mas não é de fato uma pressão.

5.4.3 Pressão de estagnação

É a pressão no ponto em que a velocidade na linha de corrente é 0, ou seja, é o ponto de impacto com um objeto sólido, etc. Deste modo, tem-se que ela é a soma da pressão estática com a pressão dinâmica. Ela é medida na direção tangencial às linhas de corrente, como na configuração 2 da figura 31.

$$p_{estag} = p_{estat} + p_{din} = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

5.4.4 Pressão dinâmica

É o termo $\frac{\rho V^2}{2}$ da equação 29, a parcela devida ao momento das partículas do fluido, onde V é a velocidade de escoamento do fluido. É medida por meio da subtração da pressão de estagnação da pressão estática.

5.4.5 Exemplo

Em uma bexiga, a pressão interna é sempre maior que a pressão externa pois a interna "resiste" à soma da pressão elástica do material da bexiga com a pressão atmosférica; dentro e fora estão em equilíbrio.

5.5 O tubo de Pitot

Os manômetros são capazes apenas de medir a diferença de pressão estática. Para medir a velocidade, pode ser usada a diferença de pressão estática e de estagnação, que será justo a componente dinâmica $\frac{\rho V^2}{2}$.

Um sistema clássico para a medição dessa pressão é o uso do tubo de Pitot, que realiza simultaneamente ambas medições a partir da seguinte configuração:

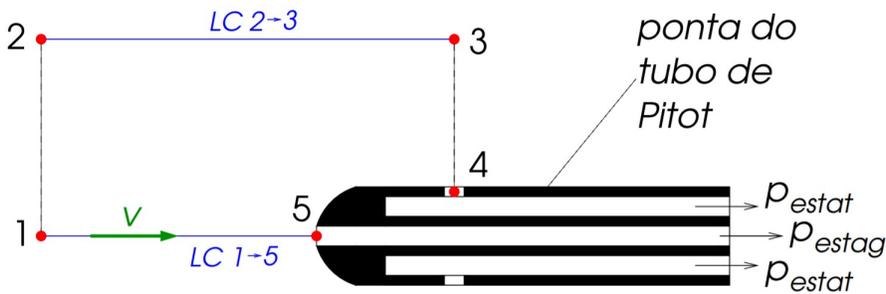


Figure 32: Esquema das pressões medidas em um tubo de pitot

Trabalhando com as pressões medidas e com a equação de Bernoulli, segue que:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_5 - p_4)}{\rho}}$$

5.6 A equação de Bernoulli na direção normal à linha de corrente

Sua formulação é dada por:

$$p + \rho \int \frac{V^2}{R} dn + \gamma z = Cte \left[\frac{J}{kg} \right] \quad (30)$$

Esta equação prevê, por exemplo, que o olho de um tornado é uma zona de baixa pressão.

5.7 Outros conceitos e consequências relacionados

5.7.1 Linha Piezométrica

O trecho e imagem abaixo foram retirados da apresentação do professor Pacífico.

A *Linha Piezométrica, LP*, é dada pela soma das cargas de elevação e pressão estática: $z + \frac{p}{\gamma}$. A diferença entre *LE* e *LP* dá a carga devida a pressão dinâmica, $\frac{V^2}{2g}$. $LE - H = z_1$ (manométrica!). *LP* permanece constante quando V se estabiliza. Na descarga $LP \propto z^4$. Como a distância entre a *LP* e a tubulação indica a carga estática ($\frac{p}{\gamma}$), trechos de tubulação que se encontram acima da *LP* indicam cargas estáticas negativas e vice-versa.

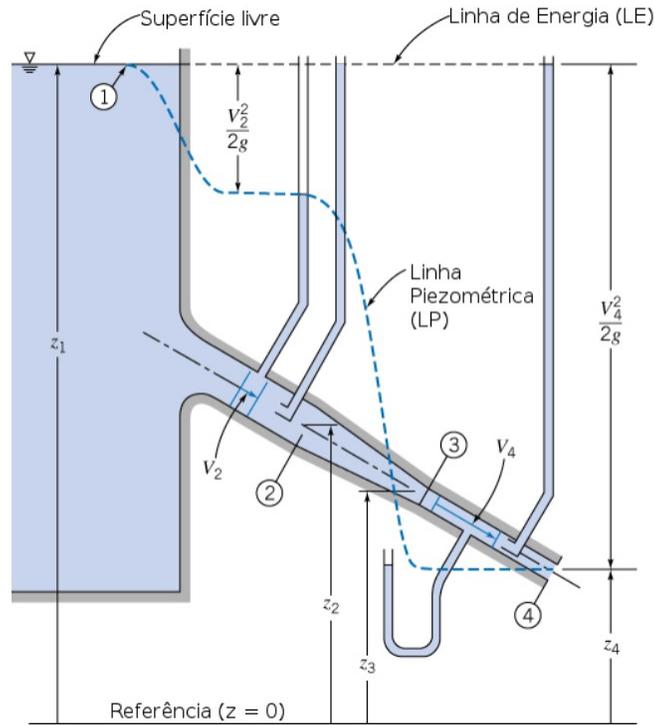


Figure 33: Imagem ilustrativa da linha piezométrica

5.7.2 Efeito Coandă

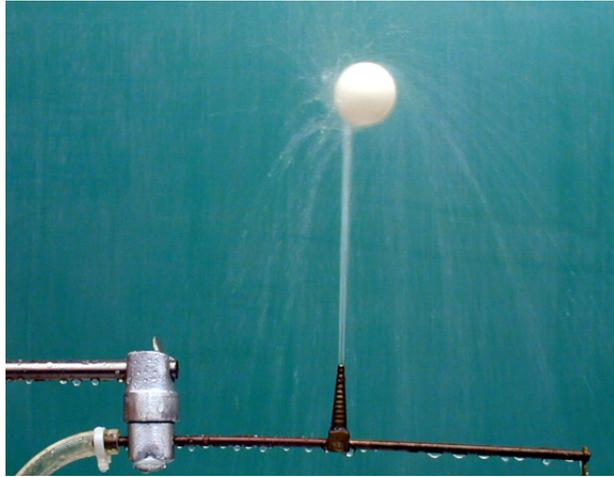


Figure 34: Bola sustentada pelo efeito Coandă sob um jato d'água

O efeito Coandă é a tendência de um filete de fluido permanecer unido à superfície adjacente. Como consequência, surgem fenômenos como o ilustrado na figura 34, onde a bola é sustentada pelo fluxo de água que incide obliquamente à sua superfície, se tornam possíveis. Isto é causado pois, devido ao efeito Coandă, parte do fluxo permanece aderido à superfície, saindo pela tangente apenas do outro lado, de modo que a força resultante é suficiente para sustentá-lo no ar.

5.7.3 Efeito Magnus

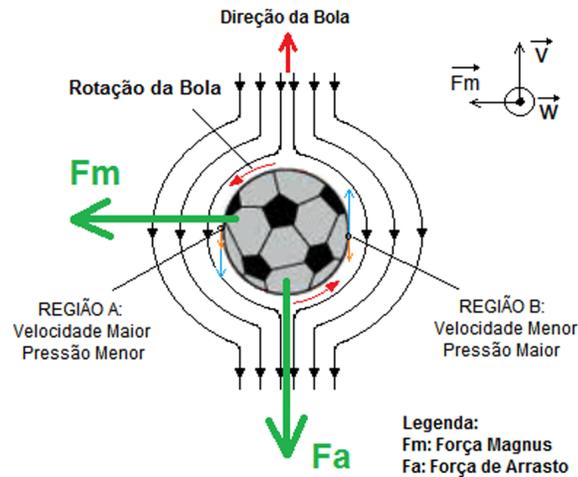


Figure 35: Esquema de forças efeito Magnus

O Efeito é aquele em que a rotação de um objeto altera sua trajetória em um fluido. De um lado da bola, a rotação está à favor do escoamento, favorecendo a aderência do fluido (efeito Coandă), do outro, o escoamento está contra a rotação, não havendo aderência. Por causa disso, a força resultante não é nula, alterando a trajetória do objeto.

Resfriar - trazer um fluido para uma temperatura até a temperatura ambiente (resfriamento do motor do carro)

Refrigerar - trazer um fluido para uma temperatura inferior a temperatura ambiente (ar condicionado)

6 Análise com Volumes de Controle Finitos

6.1 Introdução

Sistema: É a totalidade das substâncias contidas numa mesma superfície (imaginária) fechada chamada *fronteira*. Em um sistema, **o conjunto de moléculas é sempre o mesmo**; a massa é invariável. A única comunicação com a vizinhança é por meio da troca de energia, esta pode "fluir" livremente.

Vizinhança: Tudo o que está fora da fronteira

Sistema isolado é aquele que não interage com a vizinhança.

Volume de controle: É um sistema que **pode ter troca de massa**. Através da superfície de controle (análoga à fronteira) pode haver fluxo de massa e de energia.

6.2 Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

Seja N um parâmetro físico qualquer, escalar ou vetorial, este pode sempre ser escrito como função de dois outros parâmetros:

$$N = m\eta \quad (31)$$

Então por exemplo, se pegarmos a energia cinética, segue que:

$$N = m \frac{V^2}{2} = m\eta \quad (32)$$

Portanto, segue que $\eta = \frac{V^2}{2}$, que é uma função que descreve a distribuição da variável de interesse (N) por unidade de massa. É possível escrever também a relação como:

$$N_{Sistema} = \int_{m_{sistema}} \eta dm = \int_{V_{Sistema}} \eta \rho dv \quad (33)$$

A partir do desenvolvimento surgiu também o modo de chamar estas variáveis: N é a propriedade **extensiva** genérica de um sistema, o valor completo, e η é a propriedade **intensiva** associada à propriedade extensiva N . A propriedade intensiva independe da massa. A extensiva já varia diretamente com a massa.

Suponha um sistema como o da figura

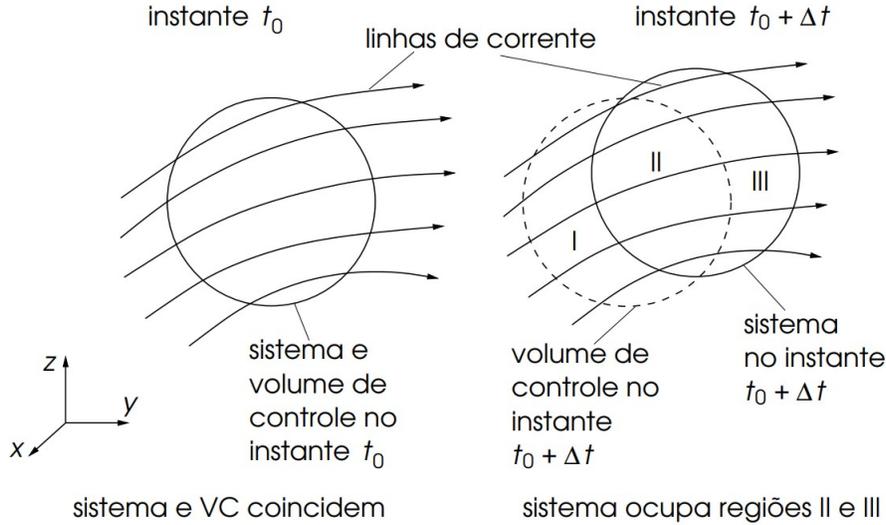


Figure 36: Representação de um volume de controle de um sistema ao longo do tempo, mas que coincidem em $t=0$. Fonte: Aula professor Pacífico

Analisando a variação da propriedade N com a passagem do tempo, tem-se:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{sis} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_{sis}} \eta \rho dv + \int_{SC3} \eta \rho \vec{V} \cdot \vec{A} + \int_{SC1} \eta \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = A + B + C \quad (34)$$

O termo A representa a variação temporal da propriedade N dentro do volume de controle. O termo B representa a vazão mássica de saída do volume de controle e o termo C a vazão mássica de entrada. V é a velocidade medida em relação à um referencial solidário ao volume de controle.

O Teorema do Transporte de Reynolds é uma ferramenta matemática que permite avaliar como as propriedades variam em um volume de controle. **Isto é válido apenas para propriedades conservativas** - massa, quantidade de movimento e energia.

É possível unir os termos B e C , resultando na seguinte formulação para o teorema para o transporte de Reynolds:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dv + \int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot \vec{A} \quad (35)$$

Ou como:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial N_{SC}}{\partial t} + \dot{N} \quad (36)$$

Onde \dot{N} é a taxa com que a propriedade esco (sua vazão) do sistema, ou seja, a variação da propriedade do tempo é dada pela sua taxa de variação temporal mais o fluxo pela superfície (a vazão). O TTR é uma maneira desenvolvida para casar o entendimento do sistema Lagrangeano com o Euleriano. A partir deste ponto já é possível notar a importância de se tratar sistema e volume de controle de formas diferentes. Olhe por exemplo o jato de um extintor de incêndio. Olhando pela perspectiva de um sistema, seria necessário acompanhar todas as partículas ao longo da atmosfera, a fronteira se

tornaria algo imenso e inalisável. Pela perspectiva do volume de controle, a superfície de controle se manteria a mesma e haveria apenas uma variação de massa, conforme a equação 35.

Caso tenha notado a semelhança deste resultado com a derivada material, é porque de fato são semelhantes. Segundo Munson et al. 2005: *Essencialmente, a derivada material (Eq. 23) é o equivalente infinitesimal do teorema de transporte de Reynolds (Eq. 35).*

6.2.1 Efeitos no regime permanente

Note que para o regime permanente, a derivada temporal é nula. Portanto, a variação da propriedade N depende apenas da taxa com que a propriedade é transportada para fora do sistema e a taxa com que é transportada para dentro.

6.2.2 Efeitos no regime transitório

Imagine uma tubulação com diâmetro variável, ao passar por uma expansão de diâmetro, a velocidade do fluido desacelera. Aqui entra um efeito do regime transitório previsto pelo TTR em que há variação temporal. Pegue a quantidade de movimento por exemplo, esta é dada por $p = mV$. Para o bocal, houve uma desaceleração na velocidade mas a vazão mássica não se altera. Portanto, a quantidade de movimento atravessando a superfície de entrada é diferente da quantidade de movimento atravessando a superfície de saída. Deste modo, a integral do tempo sob a superfície de controle na equação 35 é diferente de 0. Mas dentro do sistema, a quantidade de movimento não se altera, logo, deve haver uma variação temporal no desta propriedade no volume de controle para equilibrar o resultado previsto pela equação (e de fato há).

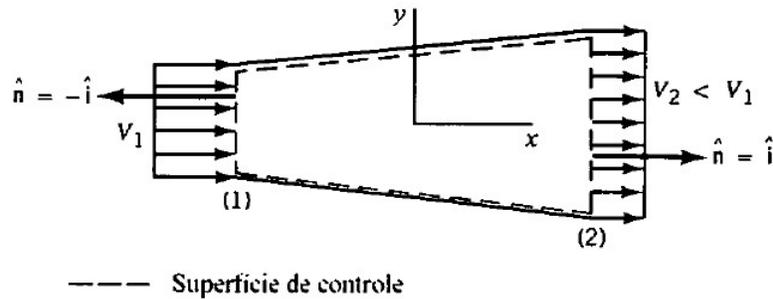


Figure 37: Escoamento numa tubulação com diâmetro variável. Fonte: Munson et al. 2005

6.2.3 Volumes de controle móvel

A única diferença para um volume de controle fixo no espaço é que, ao invés de utilizar a velocidade absoluta do fluido na equação 35, será utilizada a velocidade relativa do fluido em relação ao volume de controle.

6.3 Conservação da massa

Parte-se da hipótese de que a variação da massa para dentro do volume de controle é 0. Assume-se que $N = m$ e, portanto, $\eta = 1$.

Para facilitar contas, os vetores Velocidade e área sempre devem ser colocados de modo a serem paralelos entre si (a superfície de controle é uma superfície imaginária, você faz o que quiser). Portanto, pelo TTR, tem-se que:

$$\left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)_{sis} = \frac{\partial m_{VC}}{\partial t} + \sum_{i=0}^{n_e} \dot{m}_i \quad (37)$$

Ou seja, a variação da massa no sistema é dado pela variação da massa no tempo e pela vazão mássica. Como em um sistema a massa deve ser constante e, se for assumido regime permanente, a quantidade de massa no volume de controle não deve variar no tempo também, segue que:

$$\sum_{i=0}^{n_e} \dot{m}_i = 0 \quad (38)$$

Ou seja, a massa que entra é igual à massa que sai. Lembrando que $\dot{m} = \rho|V||A|$.

E, caso o fluido também seja incompressível:

$$\sum_{j=1}^{n_e} Q_j = \sum_{i=0}^{n_s} Q_i \quad (39)$$

6.3.1 Incompressibilidade

Admite-se que para $Ma = \frac{V}{c} > 0.3$, gases devem passar a serem tratados como compressíveis, onde:

$$c = \sqrt{kRT} \quad (40)$$

Onde k é uma constante, R a constante dos gases e T a temperatura absoluta.

6.4 Primeira lei da termodinâmica (conservação de energia)

6.4.1 1 lei da termodinâmica para sistemas

$$\Delta E = Q + W \quad (41)$$

Ou seja, a variação de energia total de um sistema é dada pela entrada de calor somado com o trabalho realizado sobre sistema. De outro modo

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (42)$$

Portanto, a variação de energia total de um sistema é dada pela transferência de calor somada com a potência mecânica adicionada ao sistema. A transferência de calor pode se dar por radiação, condução e convecção, por exemplo. Já o trabalho, a potência mecânica adicionada ou removida do sistema, pode ocorrer por meio de uma bomba ou turbina, por exemplo. É definida a entrada de calor no sistema como positiva e a saída como negativa. Analogamente, o trabalho é definido como positivo quando ele é aplicado sobre o conteúdo do volume de controle, e negativo quando o volume de controle realiza trabalho sobre o meio.

Defini-se também e como a energia total por unidade de massa, $\eta = \frac{N}{massa} = \frac{E}{massa} = e$. Ela é representada por uma soma de outras três grandezas:

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz \quad (43)$$

- e = energia específica por unidade de massa
- u = energia interna específica por unidade de massa
- $\frac{V^2}{2}$ energia cinética por unidade de massa
- gz = energia potencial por unidade de massa

Aplicando o TTR, segue que a variação de energia do sistema pode ser escrita como:

$$\frac{dE}{dt}_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \left(u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho dVC + \int_{SC} \left(u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dSC = \dot{Q} + \dot{W} \quad (44)$$

Esta equação é um resultado intermediário para a relação que se deseja derivar. Ela ainda mantém a generalidade, podendo ser aplicada à quaisquer regimes, desde que assumidas hipóteses coerentes.

6.4.2 Potência

O termo que representa a potência \dot{W} engloba três diferentes fontes de trabalho sob o sistema: a potência exercida por um fluxo adjacente ou por um pistão \dot{W}_{fluxo} , a potência transferida ao eixo de uma máquina $\dot{W}_{maquina}$ e perda de energia por forças cisalhantes \dot{W}_τ . Deste modo, \dot{W} pode ser escrito como:

$$\dot{W} = \dot{W}_{fluxo} + \dot{W}_{maquina} + \dot{W}_\tau \quad (45)$$

\dot{W}_{fluxo} ou $\dot{W}_{pressão}$ Este termo representa o trabalho realizado por forças de pressão, não importando se é um pistão empurrando o fluido ou uma diferença de pressão na tubulação. Por definição:

$$\dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{V} \quad (46)$$

Outro modo de escrever a equação é pela potencia de fluxo, expressa por:

$$\dot{W}_{fluxo} = - \int_{SC} p \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (47)$$

No resultado, $\vec{V} \cdot \vec{n}$ é positivo para expansão e negativo para compressão. Isto é consequência do sinal negativo no início da equação, originado da definição que, ao exercer trabalho sobre o sistema, a variação de energia interna deve ser positiva.

6.4.3 Potência das forças externas cisalhantes

$$\dot{W}_\tau \approx 0$$

Isto é consequência do fato de as linhas de corrente serem perpendiculares à seção transversal. A perda da carga que ela gera **aparecerá na forma de calor**.

6.4.4 Trabalho de eixo

$$\dot{W}_{maquina} = \omega T = 2\pi nT \quad (48)$$

Em que ω é a velocidade angular em rad/s e T é o torque do eixo e n é o número de rotações por unidade de tempo.

Bombas são máquinas que adicionam energia ao fluido (trabalho positivo) e turbinas são máquinas que retiram, aproveitam a energia do fluido (trabalho negativo).

Reescrevendo a equação 44 dividindo a potência em \dot{W}_{fluxo} e $\dot{W}_{maquina}$, segue que

$$\dot{W}_{maq} + \dot{Q}_{sist} - \int_{SC} p \vec{V} \cdot \vec{n} dSC = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \left(u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho dVC + \int_{SC} \left(u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dSC \quad (49)$$

ou

$$\dot{W}_{maq} + \dot{Q}_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \left(u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho dV + \int_{SC} \left(u + \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (50)$$

Esta última é a equação da primeira lei da termodinâmica aplicada à um volume de controle

6.4.5 Equação da primeira lei aplicada à dutos

Tem-se um volume de controle com um entrada e uma saída, assume-se regime permanente $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$ e fluido incompressível. Portanto

$$\dot{W}_{maq} + \dot{Q}_{sist} = - \int_{A_e} \left(u_e + \frac{V_e^2}{2} + gz_e + \frac{p}{\rho} \right) \rho V_e dA_e + \int_{A_s} \left(u_s + \frac{V_s^2}{2} + gz_s + \frac{p}{\rho} \right) \rho V_s dA_s \quad (51)$$

Em que A_e é a área de entrada e A_s a área de saída. O sinal das equações surge do produto escalar entre o versor normal (que aponta para fora do tubo) e a velocidade.

Como os perfis de velocidade nunca são uniformes, utiliza-se o coeficiente de energia cinética α . Admite-se que as propriedades são uniformes no perfil de entrada e de saída e utiliza-se a velocidade média, como se fosse um perfil uniforme. Para escoamentos turbulentos, $\alpha \approx 1$ e para escoamentos laminares $\alpha \approx 2$

Contrapondo o perfil de velocidades, as demais propriedades são consideradas uniformes, resultando na seguinte equação após a integração:

$$\left(\frac{\alpha_e V_e^2}{2} + gz_e + \frac{p_e}{\rho} \right) \rho Q - \left(\frac{\alpha_s V_s^2}{2} + gz_s + \frac{p_s}{\rho} \right) \rho Q = (u_s - u_e) \rho Q - \dot{Q} - \dot{W}_m \quad (52)$$

A explicação das variáveis pode ser observada na figura abaixo. A imagem foi retirada do slide do professor Marcos Pereira.

$$\underbrace{\left(\frac{\alpha_e V_e^2}{2} + gz_e + \frac{p_e}{\rho} \right)}_{\substack{\text{energia mecânica por} \\ \text{unidade de massa} \\ \text{na entrada}}} - \underbrace{\left(\frac{\alpha_s V_s^2}{2} + gz_s + \frac{p_s}{\rho} \right)}_{\substack{\text{energia mecânica por} \\ \text{unidade de massa} \\ \text{na saída}}} = \underbrace{\left\{ u_s - u_e - \frac{\dot{Q}}{\rho Q} \right\}}_{\substack{\text{termos térmicos} \\ \text{perda de} \\ \text{energia por} \\ \text{dissipação} \\ \text{viscosa incluída}}} - \underbrace{\frac{\dot{W}_m}{\rho Q}}_{\substack{\text{potência por} \\ \text{unidade de} \\ \text{massa devida} \\ \text{ao trabalho} \\ \text{de eixo}}}$$

Dividindo toda a expressão por g , segue que a expressão fica:

$$\underbrace{\left(\frac{\alpha_e V_e^2}{2g} + \frac{p_e}{\gamma} + z_e\right)}_{H_e = \text{carga total na seção de entrada}} - \underbrace{\left(\frac{\alpha_s V_s^2}{2g} + \frac{p_s}{\gamma} + z_s\right)}_{H_s = \text{carga total na seção de saída}} = \underbrace{\left\{u_s - u_e - \frac{\dot{Q}}{\rho Q}\right\} \frac{1}{g}}_{\frac{\dot{W}_a}{\gamma Q} = \text{perda de carga no trecho}} - \underbrace{\frac{\dot{W}_m}{\gamma Q}}_{\text{carga retirada ou fornecida por máquina}}$$

A imagem acima também foi retirada do slide do professor Marcos Pereira. É também possível reescrever a **primeira lei da termodinâmica** do seguinte modo:

$$H_e - H_s = \frac{\dot{W}_a}{\gamma Q} - \frac{\dot{W}_m}{\gamma Q} = h_L - h_m \quad (53)$$

Lembrando, se $\dot{W}_{maq} > 0$, trata-se de uma bomba. Se $\dot{W}_{maq} < 0$, trata-se de uma turbina. É importante ressaltar que o termo $\frac{\dot{W}_a}{\gamma Q}$ só é possível de ser calculado experimentalmente.

PS: carga e energia são a mesma coisa (perda de carga da tubulação = perda de energia).

6.5 Quantidade de Movimento

6.5.1 Equação Geral da Quantidade de Movimento

Sendo $N = \kappa = m\vec{V}$ a quantidade de movimento, segue que a propriedade intensiva fica $n = \vec{V}$. A quantidade de movimento nos é útil pois ela se relaciona com a segunda lei de Newton: $F_R = \frac{dP}{dt}$, portanto, permitirá o cálculo do movimento do escoamento. Aplicando o TTR para a quantidade de movimento, segue que

$$\sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{F}_{pres} + \sum \vec{F}_{cis} + \sum \vec{F}_{camp} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{V} dVC + \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dSC \quad (54)$$

Em que \vec{F}_{pres} e \vec{F}_{cis} são as força devido à diferença de pressão sobre o fluido e devido ao cisalhamento (por exemplo, a perda de carga), e \vec{F}_{camp} representa a força exercida por campos externos - como o campo gravitacional, o único que será estudado em Mecânica dos Fluidos 1. A velocidade \vec{V} refere-se à um sistema de coordenadas inercial (sem aceleração). Note que a quantidade de movimento é uma propriedade vetorial do fluido, podendo ser decomposta em \vec{x} , \vec{y} e \vec{z} .

Relembrando do sentido físico do resultado obtido pelo Teorema do Transporte de Reynolds, o termo $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{V} dVC$ representa a taxa de variação da quantidade de movimento no sistema, e o termo $\int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dSC$ representa o fluxo da quantidade de movimento através da superfície de controle.

6.5.2 Caso particular: A força de campo restringe-se apenas à força peso

As forças de campo se restringem à força peso e as forças de contato são as forças viscosa e de pressão, portanto

$$\sum \vec{F}_{camp} = \vec{G} = \int_m \vec{g} dm = \int_{VC} \vec{g} \rho dVC \quad (55)$$

e as forças de contato são a viscosa e de pressão:

$$\sum \vec{F}_{pres} + \sum \vec{F}_{cis} = \int_{SC} \vec{\tau} dS - \int_S p \vec{n} dS \quad (56)$$

Em que S é a área de contato do fluido (com a parede de um duto, por exemplo). Note também que o sinal da pressão é negativo devido à convenção de a pressão ser o negativo das tensões normais. Retornando à equação da quantidade de movimento, segue que:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_{SC_e} -p_e \vec{n} dSC_e + \int_{SC_s} -p_s \vec{n} dS_s + \int_{SC_e + \sum S_s} \vec{\tau} dS + \int_S -p_S \vec{n} dS_S + \int_S \vec{\tau}_S dS_S \quad (57)$$

Em que SC_e são as superfícies de entrada e SC_s as superfícies de saída do volume de controle.

Por fim, pode-se também definir R como sendo a força que o fluido exerce sobre o duto:

$$\vec{R} = \int_S -p_S \vec{n} dS_S + \int_S \vec{\tau}_S dS_S \quad (58)$$

Esta força é útil quando deseja-se dimensionar os dutos que serão utilizados em uma determinada máquina ou instalação. Note que $p_S \vec{n}$ representa a força que um fluido exerce sobre o duto em uma curva, por exemplo.

6.5.3 Caso Particular 2: As trajetórias são retilíneas e paralelas em todas as seções de entrada e de saída

As trajetórias são retilíneas e paralelas em todas as seções de entrada e de saída. Esta hipótese faz com que as tensões nas superfícies de entrada e de saída se reduzam apenas às tensões normais devido à força de pressão nos casos de escoamento turbulento, uma vez que a distribuição de velocidades é aproximadamente uniforme.

A hipótese permite que os termos da equação geral da quantidade de movimento possam ser escritos em termos dos valores médios, resultando em:

$$\vec{G} + \vec{R} = \sum (p_e S_e + \beta_e V_e \dot{m}_e) \vec{n}_e + \sum (p_s S_s + \beta_s V_s \dot{m}_s) \vec{n}_s + \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV \quad (59)$$

Para a quantidade de movimento, o termo β funciona de modo análogo ao α para a energia cinética. Quanto o escoamento é turbulento, $\beta \approx 1$. Para o escoamento laminar, $\beta = \frac{4}{3}$.

Muitas vezes o exercício não fornece dados suficientes sobre a tubulação para calcular o seu volume geometricamente, todavia, note que ainda assim é possível obter \vec{G} utilizando a massa específica, a velocidade e a vazão:

$$\vec{G} = \rho V Q [N] \quad (60)$$

Faça o teste com as unidades, o resultado é a força peso do fluido em Newtons. Este resultado particular muito provavelmente será suficiente para resolver todas as questões da prova de Mec Flu 1. Aproveitem que não precisa integrar!

7 Análise diferencial dos escoamento

Diferentemente da análise integral que obtêm informações macroscópicas sobre o escoamento, a análise diferencial obtêm dados em cada ponto do escoamento ao longo de sua trajetória. Isto permite, por exemplo, obter o campo de pressões ao redor de um avião. O volume de controle passa a ser um volume diferencial, ou seja, há uma discretização do problema.

7.1 Cinemática dos elementos fluidos

7.1.1 Translação

Trata-se do movimento de um elemento fluido que desloca-se sem se deformar. Ela é quantificada pelos vetores de velocidade do elemento, que move-se como um corpo rígido.

$$V = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (61)$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \quad (62)$$

7.1.2 Deformação linear

O elemento fluido deforma-se em apenas uma direção. É preciso que haja uma diferença de velocidades entre dois pontos distintos, caracterizando uma deformação. A taxa de dilatação volumétrica é dada por

$$Taxa = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad (63)$$

Se o divergente for diferente de 0, o fluido é compressível.

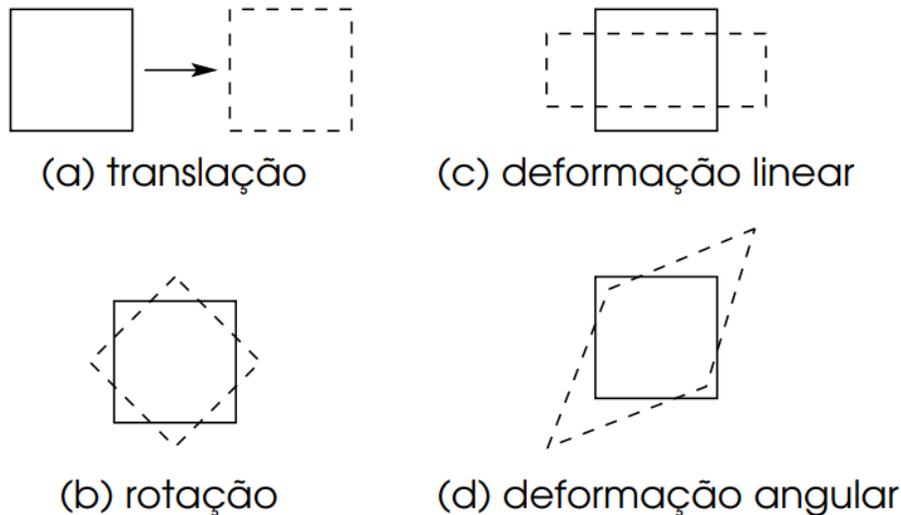


Figure 38: Tipos de movimento de um elemento fluido. Fonte: Slide do professor Pacífico

7.1.3 Rotação e deformação angular

A rotação para um elemento fluido é definida quando este comporta-se como um corpo sólido, rotacionando em torno de um eixo sem deformar-se. Já a deformação angular ocorre quando o elemento fluido, além de rotacionar, deforma-se durante o movimento, distorcendo sua forma. Estes estão representados pelos itens b e d da imagem 38, respectivamente.

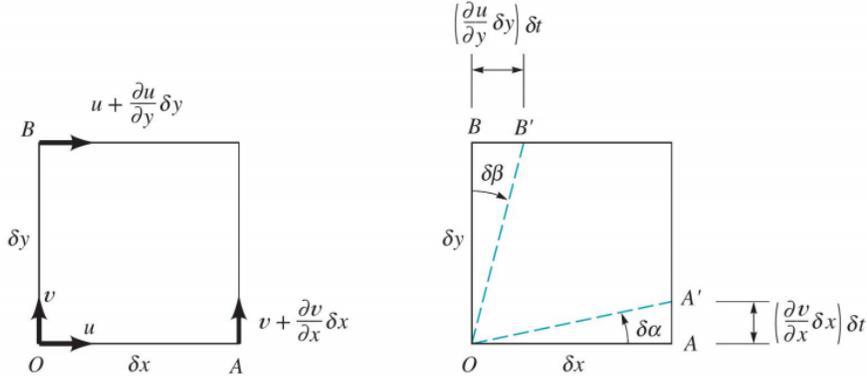


Figure 39: Vetores envolvidos na deformação angular. Fonte: Slide do professor Pacífico

A velocidade angular em torno do eixo Z é definida como a velocidade angular média entre as velocidades angulares em OA e OB.

$$\omega_{OA} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\alpha}{\delta t}; \omega_{OB} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\beta}{\delta t} \quad (64)$$

De modo que, para ângulos pequenos, é possível aproximá-las simplesmente para

$$\omega_{OA} = \frac{\partial v}{\partial x}; \omega_{OB} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (65)$$

Note que, devido à orientação dos vetores, $\frac{\partial v}{\partial x}$ resulta em um movimento no sentido horário e $\frac{\partial u}{\partial y}$ em um movimento no sentido anti-horário.

Já a velocidade angular em torno do eixo z (ω_z) é definida como a média das velocidades angulares das duas linhas, sendo definida positiva quando no sentido anti-horário. Segue que

$$\vec{\omega} = \omega_x + \omega_y + \omega_z = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (66)$$

Defini-se **vorticidade** como sendo o dobro do vetor de rotação

$$\xi = 2\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (67)$$

Se $\xi \neq 0$, em um ponto, o escoamento é dito rotacional. Se $\xi = 0$, então é dito irrotacional. A interpretação física do escoamento ser rotacional está em este realizar um movimento periódico de rotação em torno de si, o que é diferente de o fluido constituir uma curva ao longo de sua trajetória. Uma analogia consiste no movimento do astros. Se o astro estiver girando em torno do sol, mas sempre

com a mesma face está virada para o sol, o movimento não é rotacional. Todavia, se há uma variação na face que aponta para o sol, aí o movimento é rotacional.

Outro modo de escrever a vorticidade é fazendo o uso coordenadas cilíndricas

$$\vec{\xi} = \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial (r \cdot V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{e}_z \quad (68)$$

Na prática, um dos fatores muito utilizados é a taxa de deformação por cisalhamento, definida como:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad (69)$$

7.2 Equação da continuidade na forma diferencial

A equação da conservação de massa na forma integral (eq: 37) pode ser escrita como:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dVC + \sum (\rho V A)_{saidas} - \sum (\rho V A)_{entradas} = 0 \quad (70)$$

Note que a equação é escalar. Passando a equação para a forma diferencial, segue que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \quad (71)$$

De outro modo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho V) = 0 \quad (72)$$

Note que para escoamentos com fluido incompressível e em regime permanente, a equação demonstra que o divergente da velocidade pela massa específica é 0.

Novamente, em coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (\rho \cdot r \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (\rho \cdot V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho \cdot V_z)}{\partial z} = 0 \quad (73)$$

7.3 Conservação da Quantidade de Movimento e as Equações de Navier-Stokes

Define-se inicialmente F_c como sendo forças de campo e F_s como forças de contato, ambas por unidade de volume. Pela segunda lei de Newton:

$$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F}_c + \vec{F}_s \quad (74)$$

Lembrando que $\frac{D}{Dt}$ é o operador da derivada material, vista na seção de cinemática (eq: 23).

Por mágica, chega-se nas equações de Navier-Stokes. Os resultados são válidos apenas para fluidos Newtonianos e incompressíveis. O tratamento de fluidos compressíveis não será abordado tão cedo. No capítulo de propriedades dos materiais foi visto que a tensão de cisalhamento pode ser escrita na forma $\tau = \mu \frac{dV}{dy}$, todavia, este resultado está simplificado para escoamentos unidimensionais, sendo necessário adicionar a componente de variação nos demais eixos - lembrando que o uso de y é apenas um caso particular. Para a dedução, as hipóteses adotadas por Stokes foram:

- $\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$
- $\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$
- $\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$
- $\tau_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$
- $\tau_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$
- $\tau_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$

Resultando em

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \vec{V} \right] = \rho \cdot \vec{g} - \nabla \cdot p + \mu \cdot \nabla^2 \cdot \vec{V} \quad (75)$$

Decompondo os termos vetoriais separadamente, segue que

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (76)$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho \cdot g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (77)$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \cdot g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (78)$$

Estas equações permitem resolver diferencialmente o escoamento ao longo de todos os seus pontos discretizados, trazendo descrições extremamente precisas sobre a trajetória, velocidades, pressões, etc. O grande "problema" das equações de Navier-Stokes é a inexistência de uma solução analítica para a equação, exigindo um grande custo computacional para resolvê-la numericamente. Note também que há 5 incógnitas na equação (u, v, w, p, ρ), precisando do uso das três componentes vetoriais, da equação da continuidade e da equação da energia para resolver o sistema. (a equação da energia é vista apenas em mecânica dos fluidos 2)

7.3.1 Equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \cdot \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \cdot g_r + \mu \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] \quad (79)$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r \cdot V_\theta}{r} + V_z \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho \cdot g_\theta + \mu \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (80)$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \cdot \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \cdot \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \cdot g_z + \mu \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] \quad (81)$$

7.4 Métodos para resolução do escoamento diferencial

7.4.1 DNS - Direct Numerical Simulation

É o método que consiste em resolver as equações de Navier-Stokes sem o uso de nenhum modelo de turbulência, ou seja, sem o uso de nenhuma simplificação. Todas as escalas de espaço e tempo precisam ser resolvidas na malha, exigindo um custo computacional extremamente alto.

7.4.2 Escoamento viscoso entre placas planas

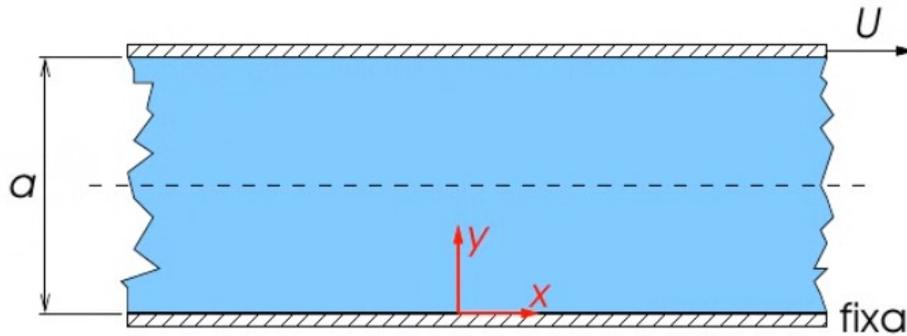


Figure 40: Escoamento entre placas planas. Fonte: Slide do professor Pacífico

Hipóteses adotadas

- Escoamento Laminar plenamente desenvolvido

Como consequência das hipóteses, segue que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Segue que

$$u(y) = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot y^2 + \frac{C_1}{\mu} \cdot y + C_2 \quad (82)$$

Note que C_2 é a velocidade do escoamento na parede. Aplicando as condições de contorno, é possível demonstrar que C_1 é dado por:

$$C_1 = \frac{\mu \cdot U}{a} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (83)$$

Com um pouco de álgebra, chega-se à uma fórmula para o cálculo da velocidade média para o caso do escoamento entre placas planas é dada por

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{b \cdot a} = \frac{U}{2} - \frac{a^2}{12 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (84)$$

Em que **a** é distância entre as placas e **b** sua largura.

7.4.3 Escoamento Couette

Este é o escoamento dado na região entre dois tubos com diâmetros semelhantes - é o famoso problema do mancal girando visto no capítulo de propriedades do fluido 2. Aplicando as condições de contorno, mostra-se que a aproximação assumida na fórmula 2.3 é razoável, ou seja, vale as seguintes aproximações:

$$V_r = \frac{U}{b} \cdot (r_o - r) \quad (85)$$

$$\tau_r = \frac{\mu U}{b} \quad (86)$$

Em que U é a velocidade linear de rotação do mancal, ou seja, $U = r_i \omega$ e b é a espessura de película de fluido $b = r_e - r_i$ (externo - interno).

7.4.4 Escoamento Poiseuille

Este escoamento ocorre tanto entre placas planas infinitas e fixas, como no interior de dutos de seção circular. As hipóteses fundamentais para este tipo de escoamento que é o gradiente de pressão apresenta variação constante $\frac{\partial p}{\partial x} = \mathbf{Cte}$ e que as placas estão fixas, portanto, $U = 0$.

Entre placas planas, segue as seguintes conclusões a partir da equação de Navier-Stokes (75):

$$u(y) = \frac{1}{8 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot (4 \cdot y^2 - a^2) \quad (87)$$

$$\tau_{xy} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot y \quad (88)$$

$$\frac{Q}{b} = - \frac{a^3}{12 \mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (89)$$

$$\bar{u} = - \frac{a^2}{12 \mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (90)$$

$$u_{max} = \frac{3\bar{u}}{2} \quad (91)$$

Já para tubos, convém mais fazer o uso de coordenadas cilíndricas. Neste caso o eixo z é colocado como o eixo axial do tubo e r e θ descrevem a posição na seção transversal. Deste modo, aplicando as condições de contorno e álgebra, segue que:

$$V_z(r) = \frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot (r^2 - R^2) \quad (92)$$

A partir deste resultado para a velocidade é possível chegar na Equação de Poiseuille (120), visto na seção 9. Esta também pode ser escrita isolando a vazão, de modo que

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \mu L} \quad (93)$$

A velocidade média no duto, por definição, é dada por $\bar{V} = \frac{Q}{A}$, de modo que

$$\bar{V}_z = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu L} \quad (94)$$

E como também já visto, para um escoamento laminar plenamente desenvolvido, segue que:

$$V_{z,max} = 2\bar{V}_z \quad (95)$$

$$V_z = V_{z,max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (96)$$

As condições iniciais e os resultados obtidos refletem um escoamento laminar plenamente desenvolvido, de modo que é formado um campo de velocidades na direção z . Devido à simetria do tubo em todas as direções, não há variação em função de R e de θ , apenas de z . Este é um resultado característico de escoamentos forçados em condutos em que o fluido desloca-se continuamente e uniformemente ao longo de sua trajetória.

7.4.5 Escoamento em Espaço Anular

É o escoamento que ocorre entre dois tubos concêntricos. Muito aplicados em problemas que envolvem trocadores de calor. As condições iniciais são que a velocidade é nula nas paredes, e aplica-se também a solução do campo de velocidades na direção z , como visto no item anterior.

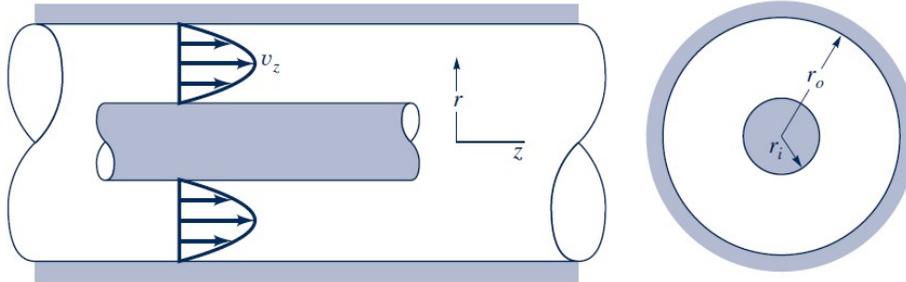


Figure 41: Ilustração de um escoamento viscoso em espaço anular. Fonte: Munson et. al.

Fica a cargo do leitor realizar a dedução, chegando-se nas soluções para a velocidade e vazão:

$$V_z(r) = \frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot \left[r^2 - r_0^2 + \frac{r_i^2 - r_0^2}{\ln(r_o/r_i)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \right] \quad (97)$$

$$Q = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8 \cdot \mu \cdot L} \cdot \left[r_0^4 - r_i^4 - \frac{(r_0^2 - r_i^2)^2}{\ln(r_o/r_i)} \right] \quad (98)$$

Note que o ponto de velocidade máxima não é mais dada no centro do conduto. Essa nova posição pode ser calculada utilizando a fórmula:

$$r_m = \sqrt{\frac{r_o^2 - r_i^2}{2 \cdot \ln(r_o/r_i)}} \quad (99)$$

7.4.6 Escoamento viscoso em superfícies verticais

Considere o caso em que o fluido não escoa em um duto ou tubulação, mas que não está completamente livre como no ar também. Se a superfície de contato for uniforme - como em uma parede ou em um rio - é possível abordá-lo analiticamente. Para o caso de o escoamento ser verticalmente descendente, com espessura δ constante, segue que:

$$u(y) = \frac{\rho \cdot g \cdot \delta^2}{\mu} \cdot \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (100)$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \rho g (\delta - y) \quad (101)$$

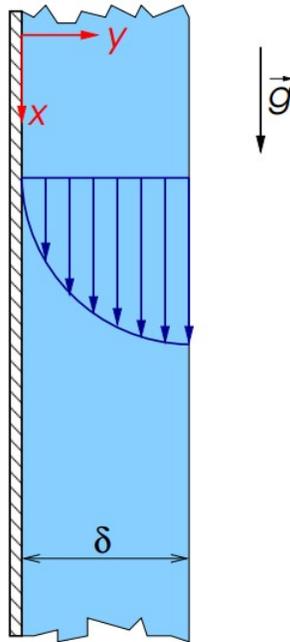


Figure 42: Imagem de escoamento vertical descendente. Fonte: slides do professor Pacífico

As hipóteses assumidas foram de que não há velocidade nas direções y e z , e que o fluido é incompressível, portanto, seu divergente é 0.

Outros dois dados são a vazão por unidade de largura e a velocidade média. Estas são dadas por:

$$\frac{Q}{b} = \frac{\rho g \delta^3}{3\mu} \quad (102)$$

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu} \quad (103)$$

Relembrando, todo o equacionamento mostrado das equações de Navier-Stokes foi realizado assumindo escoamento laminar plenamente desenvolvido.

8 Análise dimensional

É comum em mecânica dos fluidos fazer uso de adimensionais para avaliar comportamentos físicos e como variam seguindo determinadas condições. Por exemplo, o fluxo através de um tubo com uma placa barrando o movimento.

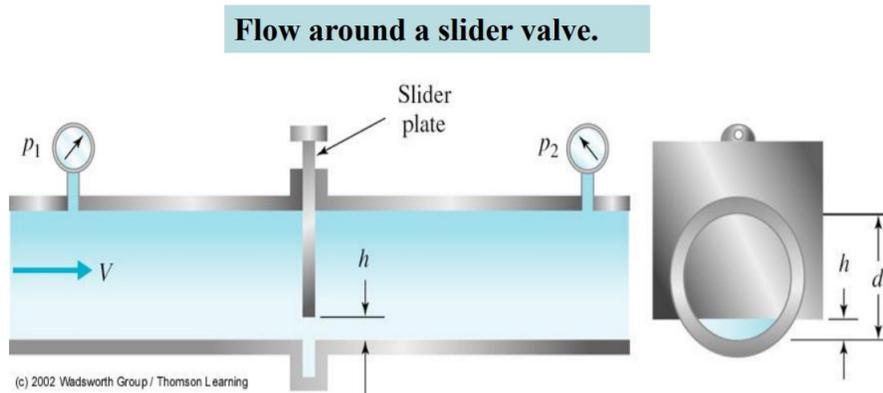


Figure 43: Modelo de válvula

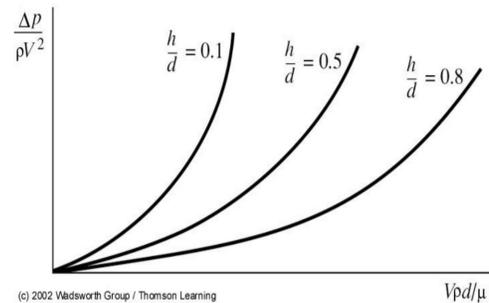


Figure 44: Resultados do modelo de válvula

Ao invés de olhar separadamente para o raio do tubo e para o tamanho da abertura h , é possível analisar a proporção entre eles (adimensional) e obter uma relação que é válida para outros tubos com dimensões diferentes também. Isto permite, por exemplo, levar os resultados obtidos em um experimento em escala reduzida para um modelo em escala real - algo que é muito feito para economizar recursos. Como na figura 46.

Um ponto importante do adimensional é que ele reúne diferentes variáveis em um único fator. Analiticamente, não seria possível calcular, por exemplo, o ganho de pressão ao atravessar a válvula.

Experimentalmente, são 6 variáveis - pressão, diâmetro, densidade, viscosidade, velocidade do escoamento e abertura da válvula. Todavia, ao invés de analisar 5 gráficos diferentes, é possível reuni-las em um adimensional e analisar uma relação entre duas variáveis. Além disso, por ser adimensional, ainda consegue ser extrapolada para outras combinações.

8.1 Teorema de Buckingham π

Suponha uma equação de n variáveis e dimensionalmente homogênea. Ela pode ser reduzida a uma relação $n - r$ produtos independentes, onde r é o número mínimo de dimensões básicas necessárias para descrever as variáveis. É comum usar o símbolo π para representar um produto de variáveis dimensionais cujo resultado seja adimensional.

Exemplo - retirado do livro "Uma introdução concisa à mecânica dos fluidos", Munson, exemplo 7.1 Deseja-se calcular o arrasto numa placa fina e plana. O arrasto pode ser escrito em função das variáveis w = largura da placa, h = altura da placa, μ = viscosidade dinâmica do fluido, ρ = massa específica do fluido e V = velocidade do escoamento.

A formulação do problema indica que:

$$D = f(w, h, \mu, \rho, V)$$

Logo, há seis variáveis que são importantes no problema:

$$D \doteq MLT^{-2}$$

$$w \doteq L$$

$$h \doteq L$$

$$\mu \doteq ML^{-1}T^{-1}$$

$$\rho \doteq ML^{-3}$$

$$V \doteq LT^{-1}$$

Aplicando o teorema de Buckingham π , tem-se que serão necessários 3 termos π para descrever o fenômeno - seis variáveis menos três dimensões de referência: $k - r = 6 - 3 = 3$.

8.2 Adimensionais

Em mecânica dos fluidos, é possível descrever problemas qualitativamente apenas usando as dimensões. Elas serão, também, necessárias para estabelecer relações de proporção quando for feita uma análise entre modelo e protótipo (ensaios). Note que a maior parte dos problemas pode ser descrito utilizando apenas 3 dimensões básicas: Mass, Length e Temperature (MLT) ou Force, Length e Temperature (FLT) - ambas são equivalentes devido a segunda lei de Newton.

Agora com uma vista aplicada à resolução de problemas, uma base comumente utilizada é a ρVL devido à grande conveniência dos adimensionais que serão encontrados a partir dela. Com isso, tem-se que: ρ = massa específica; V = velocidade; L = comprimento; μ = viscosidade dinâmica; g = aceleração da gravidade; p = pressão; C = celeridade e σ = tensão superficial.

| BASE | ρ | V | L | μ | g | p | C | σ |
|------|--------|-----|-----|-------|-----|-----|-----|----------|
| F | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| L | -4 | 1 | 1 | -2 | 1 | -2 | 1 | -1 |
| T | 2 | -1 | 0 | 1 | -2 | 0 | -1 | 0 |

Figure 45: Tabela de dimensões aula

| | Sistema <i>FLT</i> | Sistema <i>MLT</i> |
|----------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Aceleração | LT^{-2} | LT^{-2} |
| Aceleração angular | T^{-2} | T^{-2} |
| Ângulo | $F^0 L^0 T^0$ | $M^0 L^0 T^0$ |
| Área | L^2 | L^2 |
| Calor | FL | $ML^2 T^{-2}$ |
| Calor específico | $L^2 T^{-2} \Theta^{-1}$ | $L^2 T^{-2} \Theta^{-1}$ |
| Comprimento | L | L |
| Deformação (relativa) | $F^0 L^0 T^0$ | $M^0 L^0 T^0$ |
| Energia | FL | $ML^2 T^{-2}$ |
| Força | F | MLT^{-2} |
| Frequência | T^{-1} | T^{-1} |
| Massa | $FL^{-1} T^2$ | M |
| Massa específica | $FL^{-4} T^2$ | ML^{-3} |
| Módulo de elasticidade | FL^{-2} | $ML^{-1} T^{-2}$ |
| Momento de inércia (área) | L^4 | L^4 |
| Momento de inércia (massa) | FLT^2 | ML^2 |
| Momento de uma força | FL | $ML^2 T^{-2}$ |
| Peso específico | FL^{-3} | $ML^{-2} T^{-2}$ |
| Potência | FLT^{-1} | $ML^2 T^{-3}$ |
| Pressão | FL^{-2} | $ML^{-1} T^{-2}$ |
| Quantidade de movimento | FT | MLT^{-1} |
| Temperatura | Θ | Θ |
| Tempo | T | T |
| Tensão | FL^{-2} | $ML^{-1} T^{-2}$ |
| Tensão superficial | FL^{-1} | MT^{-2} |
| Torque | FL | $ML^2 T^{-2}$ |
| Trabalho | FL | $ML^2 T^{-2}$ |
| Velocidade | LT^{-1} | LT^{-1} |
| Velocidade angular | T^{-1} | T^{-1} |
| Viscosidade cinemática | $L^2 T^{-1}$ | $L^2 T^{-1}$ |
| Viscosidade dinâmica | $FL^{-2} T$ | $ML^{-1} T^{-1}$ |
| Volume | L^3 | L^3 |

Figure 46: Tabela de dimensões Munson

A partir das três grandezas principais - ρ , L e V , é possível deduzir os principais adimensionais utilizados em mecânica dos fluidos. A tabela da figura 47 traz sua formulação e sentido físico.

8.2.1 Número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho V l}{\mu} \quad (104)$$

Este é um adimensional especialmente importante, ele é construído a partir da divisão da *força de inércia* pela *força viscosa*. Ele é utilizado para caracterizar se o regime de escoamento é laminar ou turbulento.

Para números de Reynolds inferiores a 2000, o fluxo laminar prevalece. Acima de 2000, prevalece então o escoamento turbulento. Um número de Reynolds alto indica que os efeitos viscosos são pequenos em relação aos de inércia, caracterizando o problema como *invíscido*, ou seja, efeitos viscosos com pouca importância. Se $Re \ll 1$, as forças viscosas são relevantes no problema e é possível desprezar os efeitos de inércia - por exemplo, a massa específica não será uma variável importante.

Força inercial: É a força devido ao movimento do corpo (inércia). Um corpo em repouso ou movimento tende a permanecer neste estado e, tentar perturbá-lo, irá gerar uma reação.

Força viscosa: É a força que caracteriza a resistência do fluido ao escoamento. Esta é a força que dá origem ao arrasto, presente em muitas aplicação da engenharia: carros, foguetes, aviões, etc.

8.2.2 O número de Euler

$$Eu = \frac{p}{\rho V^2} \quad (105)$$

É também usual escrever o número de Euler em função da diferença de pressão, Δp . Ele é muito utilizado em problemas onde a pressão ou a diferença de pressão entre dois pontos é uma variável importante. Por definição, este número é uma razão entre as forças de pressão e de inércia.

8.2.3 Número de Mach

$$Ma = \frac{V}{c} \quad (106)$$

Onde c é a velocidade do som. Este número é um indicativo da razão entre a força de inércia e a força de compressibilidade. Ele é muito utilizado na análise de escoamento compressíveis. Para números baixos de Mach ($Ma < 0.3$), pode-se assumir desprezíveis os efeitos de compressibilidade.

| Tabela 7.1 Alguns Grupos Adimensionais e Variáveis Utilizadas na Mecânica dos Fluidos | | | |
|---|------------------------------------|--|---|
| Variáveis: Aceleração da gravidade, g ; Módulo de elasticidade volumétrico, E_v ; Comprimento característico, l ; Massa específica, ρ ; Frequência de oscilação do escoamento, ω ; Pressão, p (ou Δp); Velocidade do som, c ; Tensão superficial, σ ; Velocidade, V ; Viscosidade dinâmica, μ | | | |
| Item 7.6, pág 359 Munson | | | |
| Grupo Adimensional | Nome | Interpretação | Tipos de Aplicação |
| $\frac{\rho V l}{\mu}$ | Número de Reynolds, Re | $\frac{\text{força de inércia}}{\text{força viscosa}}$ | É importante na maioria dos problemas de mecânica dos fluidos |
| $\frac{V}{\sqrt{g l}}$ | Número de Froude, Fr | $\frac{\text{força de inércia}}{\text{força gravitacional}}$ | Escoamentos com superfície livre |
| $\frac{p}{\rho V^2}$ | Número de Euler, Eu | $\frac{\text{força de pressão}}{\text{força de inércia}}$ | Problemas onde a pressão, ou diferenças de pressão, são importantes |
| $\frac{\rho V^2}{E_v}$ | Número de Cauchy ^a , Ca | $\frac{\text{força de inércia}}{\text{força de compressibilidade}}$ | Escoamentos onde a compressibilidade do fluido é importante |
| $\frac{V}{c}$ | Número de Mach ^a , Ma | $\frac{\text{força de inércia}}{\text{força de compressibilidade}}$ | Escoamentos onde a compressibilidade do fluido é importante |
| $\frac{\omega l}{V}$ | Número de Strouhal, St | $\frac{\text{força de inércia (local)}}{\text{força de inércia (convectiva)}}$ | Escoamentos transitórios com uma frequência de oscilação característica |
| $\frac{\rho V^2 l}{\sigma}$ | Número de Weber, We | $\frac{\text{força de inércia}}{\text{força de tensão superficial}}$ | Problemas onde os efeitos da tensão superficial são importantes |

Figure 47: Principais adimensionais de Mecânica dos fluidos

Retomando o exemplo supracitado, agora definiremos quais são os adimensionais. Tem-se que:

$$D \doteq MLT^{-2}$$

$$w \doteq L$$

$$h \doteq L$$

$$\mu \doteq ML^{-1}T^{-1}$$

$$\rho \doteq ML^{-3}$$

$$V \doteq LT^{-1}$$

Cada uma das variáveis π deve ser linearmente independente das demais, logo, com uma análise rápida tem-se que w , ρ e V constituem uma opção - note que cada uma das variáveis apresenta uma dimensão que as demais não contêm.

Iniciando o processo, cria-se

$$\pi_1 = Dw^a V^b \rho^c$$

Substituindo as variáveis por suas dimensões

$$(MLT^{-2})(L^a)(L^b T^{-b})(M^c L^{-3c}) \doteq M^0 L^0 T^0$$

Logo, tem-se que:

$$\pi_1 = \frac{D}{w^2 V^2 \rho}$$

Analogamente,

$$\pi_2 = \frac{h}{w}$$
$$\pi_3 = \frac{\mu}{wV\rho}$$

Como a natureza da relação determinada pela função Φ ainda é desconhecida, pode-se escrever π_3 como:

$$\pi_3 = \frac{\rho V w}{\mu}$$

Finalmente, podemos expressar os resultados na análise dimensional como:

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3)$$

Note que esta escolha de variáveis é extremamente conveniente pois π_2 é a razão de aspecto e π_3 o número de Reynolds.

8.3 Modelos e semelhança

Modelo: Representação de um sistema físico que pode ser utilizado para prever o comportamento de alguma característica do sistema.

Protótipo: Sistema físico para quais as previsões do modelo são feitas

8.3.1 Teoria dos modelos

Como já visto, qualquer problema pode ser descrito em função da análise dimensional, de modo que é possível expressá-lo em função de um adimensional:

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n) \quad (107)$$

De modo análogo ao protótipo, se os mesmos fenômenos estiverem sendo representados, é também possível expressar o modelo em função de uma relação similar, onde a forma da função será a mesma:

$$\pi_{1m} = \Phi(\pi_{2m}, \pi_{3m}, \dots, \pi_{nm}) \quad (108)$$

Assim, como ϕ é igual para os dois e $\pi_2 = \pi_{2m}, \pi_3 = \pi_{3m}, \dots, \pi_n = \pi_{nm}$, tem-se que $\pi_1 = \pi_{1m}$, ou seja, obteve-se uma equação equivalente para o modelo e o protótipo.

Seguindo os critérios de semelhança, tem-se que $\pi_2 = \pi_{2m}$ implica uma mesma razão de aspecto entre as placas. Disso:

$$w_m = \frac{h_m}{h} w$$

Tem-se também que $\pi_3 = \pi_{3m}$, ou seja, os números de Reynolds devem ser os mesmos. Logo:

$$V_m = \frac{\mu_m}{\mu} \frac{\rho_m}{\rho} \frac{w_m}{w} V$$

Agora que garantimos que $\pi_2 = \pi_{2m}, \pi_3 = \pi_{3m}$ são iguais, podemos afirmar que $\pi_{1m} = \pi_1$ e finalmente contruir a relação:

$$\frac{D}{w^2 V^2 \rho} = \frac{D_m}{w_m^2 V_m^2 \rho_m}$$

ou

$$D = \left(\frac{w}{w_m}\right)^2 \left(\frac{\rho}{\rho_m}\right) \left(\frac{V}{V_m}\right)^2 D_m$$

Conclusões Note que π_2 e π_3 forçaram uma semelhança geométrica e uma escala geométrica e uma escala de velocidades, respectivamente. Já π_3 força uma escala geométrica, uma escala de velocidades e uma escala entre as massas específicas utilizadas no protótipo e no modelo. Em compensação, ela retorna uma relação entre as forças medidas no protótipo e no modelo, que era o desejado.

Desse experimento pode-se observar que, para obter uma relação entre os modelos, é preciso fazer uma escala geométrica completa (incluindo a rugosidade) entre o protótipo e o modelo. É algo intuitivo e extremamente importante. Outra semelhança importante é a razão entre forças, por exemplo, do número de Reynolds. Igualdade entre os termos de π exige que a proporção entre as forças seja igual nos dois modelos, logo, que este adimensional seja igual - se aplica aos demais adimensionais semelhantes também.

Essas condições garantidas, tem-se a semelhança dinâmica entre modelo e protótipo. Relações como (a_m/a) e (V_m/V) permanecem constante, obtêm-se também uma semelhança cinemática entre o modelo e o protótipo.

9 Escoamento viscoso em condutos

9.1 Componentes típicos de um sistema de dutos

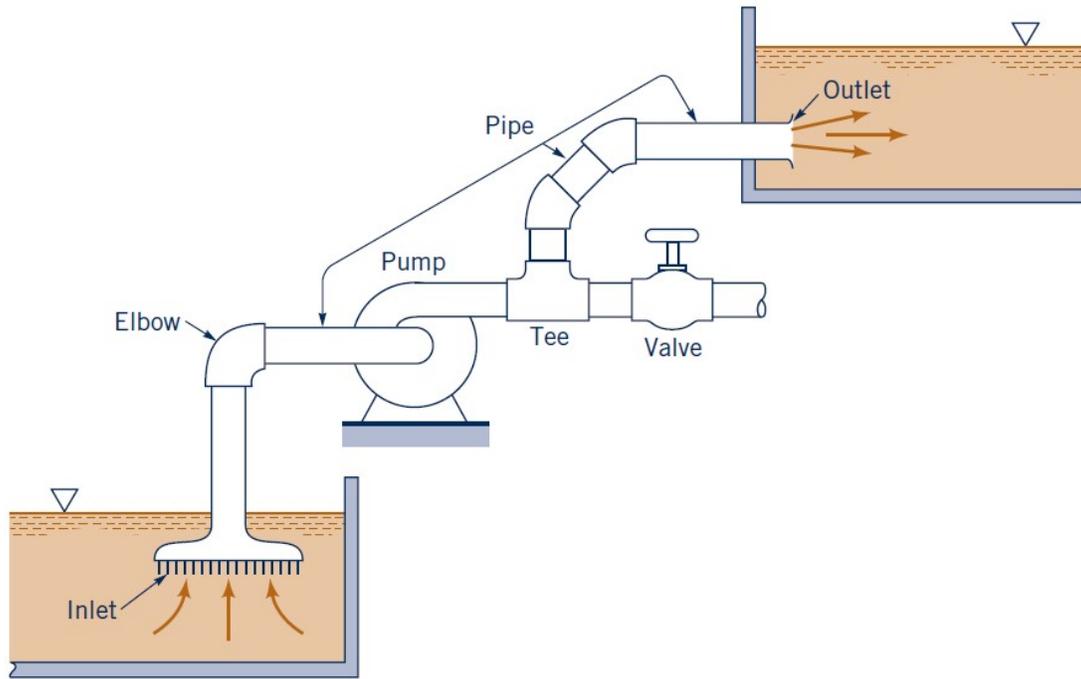


Figure 48: Componentes típicos de um sistema de dutos. Fonte: Munson et al. 2005

9.2 Regimes de escoamento

Relembrando os regimes de escoamento discutidos no capítulo 4, tem-se que o escoamento pode ser classificado como:

- Escoamento laminar: $Re < 2100$;
- Escoamento de transição: $2100 < Re < 4000$;
- Escoamento turbulento: $Re > 4000$;

Esta é uma classificação recomendada que utiliza o número de Reynolds, mas a transição real do escoamento laminar para o turbulento não possui um valor definido, devendo ser considerada experimentalmente. Este valor adimensional representa a influência da viscosidade no amortecimento das perturbações do escoamento. Sua definição é repetida novamente abaixo:

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D_h}{\mu} = \frac{\bar{V} D_h}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu} \quad (109)$$

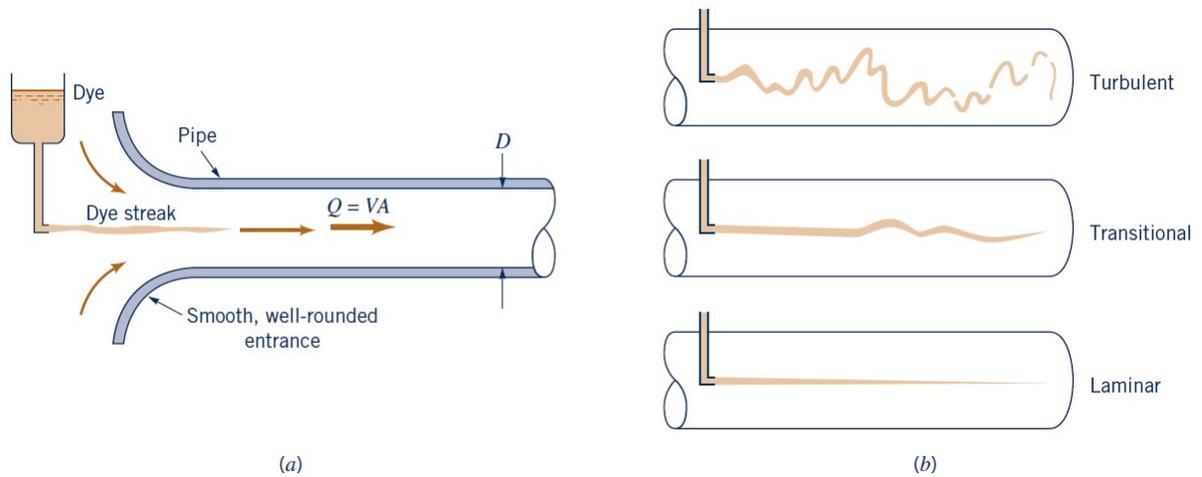


Figure 49: Experimento de Osborne Reynolds e os regimes de escoamento. Fonte: Munson et al. 2005

O mecanismo gerador da turbulência é o atrito viscoso do fluido com a parede. Ao passo que para o escoamento laminar é possível descrever o gradiente de velocidades como uma linha contínua, para o escoamento turbulento, a curva com perfil de potência é a média do perfil observado.

9.3 Região de Entrada e Escoamento Completamente desenvolvido

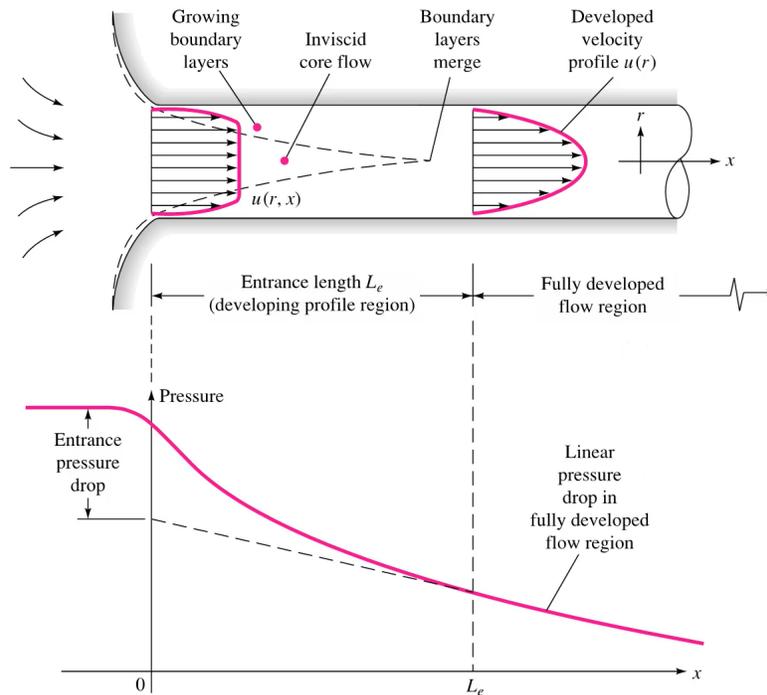


Figure 50: Imagem ilustrativa da região de entrada de um escoamento em um conduto. Fonte: Aula Bruno Carmo

- **Região de entrada:** região do escoamento que será a alimentação de fluxo. É a distância que o fluido necessita para desenvolver-se completamente.
- **Escoamento plenamente desenvolvido:** Escoamento que não apresenta variação do perfil de velocidade ao longo da sua extensão
- **Dimensionamento da região de entrada:**

$$\text{Para Regime Laminar} \quad L_e = 0,66ReD$$

$$\text{Para Regime Turbulento} \quad L_e = 4,4(Re)^{1/6}D$$

Para escoamentos turbulentos, a fórmula é apenas um valor médio, não há solução analítica.

No escoamento completamente desenvolvido haverá um gradiente de pressão, todavia as forças de pressão estão equilibradas com as forças de viscosidade, fazendo com que não tenha uma variação no perfil de pressão ao longo do escoamento.

No escoamento não plenamente desenvolvido é importante levar em consideração as forças de inércia. Nele, o módulo do gradiente de pressão $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ é maior na região de entrada que na região de escoamento plenamente desenvolvido, onde torna-se constante. A figura 50 mostra este comportamento. Ao final, a força gerada devido à diferença de pressão serve para vencer a energia perdida devido ao atrito viscoso. Note que a componente peso do fluido pode interferir positiva ou negativamente no escoamento, isto se o duto não estiver na horizontal.

9.3.1 Velocidade média

É um valor definido na engenharia para representar o escoamento. Ele representa a velocidade que, multiplicada pela área do duto, resulta na vazão total.

$$\dot{m} = \rho \bar{V} A_c = \int_{A_c} \rho V(r) dA_c \quad (110)$$

$$\bar{V} = \frac{2}{R^2} \int_0^R V(r) dr \quad (111)$$

9.3.2 Perfil de velocidades para um escoamento laminar plenamente desenvolvido

$$V(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx}\right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (112)$$

Onde r é a distância radial medida da linha de centro. Aplicando o conceito de velocidade média, tem-se que:

$$\bar{V} = -\frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{dp}{dx}\right) \quad (113)$$

Logo, segue a relação entre a velocidade $V(r)$ e \bar{V} :

$$V(r) = \frac{1}{2} \bar{V} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (114)$$

9.4 Perda de carga distribuída

Para o escoamento laminar e o turbulento, a forma como a perda de carga é tratada de maneira diferente.

9.4.1 Fórmula universal de perda de carga de Darcy-Weisbach

Esta é a formulação mais usual para o cálculo da perda de carga distribuída, todavia, há diversas outras obtidas experimentalmente. Sua formulação é dada por:

$$h_l = \frac{\Delta p}{\gamma} = f \frac{L}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad (115)$$

Onde L é o comprimento percorrido, D_h é o diâmetro hidráulico e o resto é o que você espera. Note que esta equação é válida apenas quando não há perda de pressão devido à variação de de altura. O diâmetro hidráulico é definido como a área da seção transversal dividida pelo perímetro.

$$D_h = \frac{4 \cdot A_c}{P} \quad (116)$$

Em tubos, $D_h =$ diâmetro do tubo.

9.4.2 Escoamento laminar

A perda de carga é diretamente proporcional à velocidade média, portanto, à vazão. Isto implica que, quanto maior a vazão, maior a perda de carga. Tem-se também que a perda é inversamente proporcional ao diâmetro, portanto, não é conveniente utilizar dutos muito pequenos.

$$f = \frac{8\tau_p}{\rho \bar{V}^2} = \frac{64}{Re} \quad (117)$$

Isto para o escoamento laminar, o turbulento completo independe de Reynolds, passando a depender apenas da rugosidade. Essa transição é representada pela curva no diagrama de Moody (figura 51) cortando as demais.

9.5 Equação de Colebrook

É uma equação obtida A equação abaixo, por sua vez, foi obtida empiricamente. Ela é utilizada para relacionar a rugosidade do conduto com o adimensional f .

Note que, quando o número de Reynolds cresce, o seguinte termo tende a zero, ou seja, a partir de um certo número de Reynolds o escoamento passa a independer da deste adimensional, recaindo apenas à rugosidade do conduto. função encontrada estatisticamente para descrever a relação entre f , Re e rugosidade.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\frac{\epsilon}{D}}{3,7} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (118)$$

Ao utilizar a equação, já esteja ciente que um erro de cerca de 10% a 15% que, normalmente, é compensado na potência da bomba.

Para diminuir o erro para 1%, é utilizado método de estimar um f_0 - a partir do diagrama de Moody, por exemplo - substituir no lado **direito** da equação e recalculer o f a partir da estimativa inicial. Essa estimativa pode ser feita utilizando:

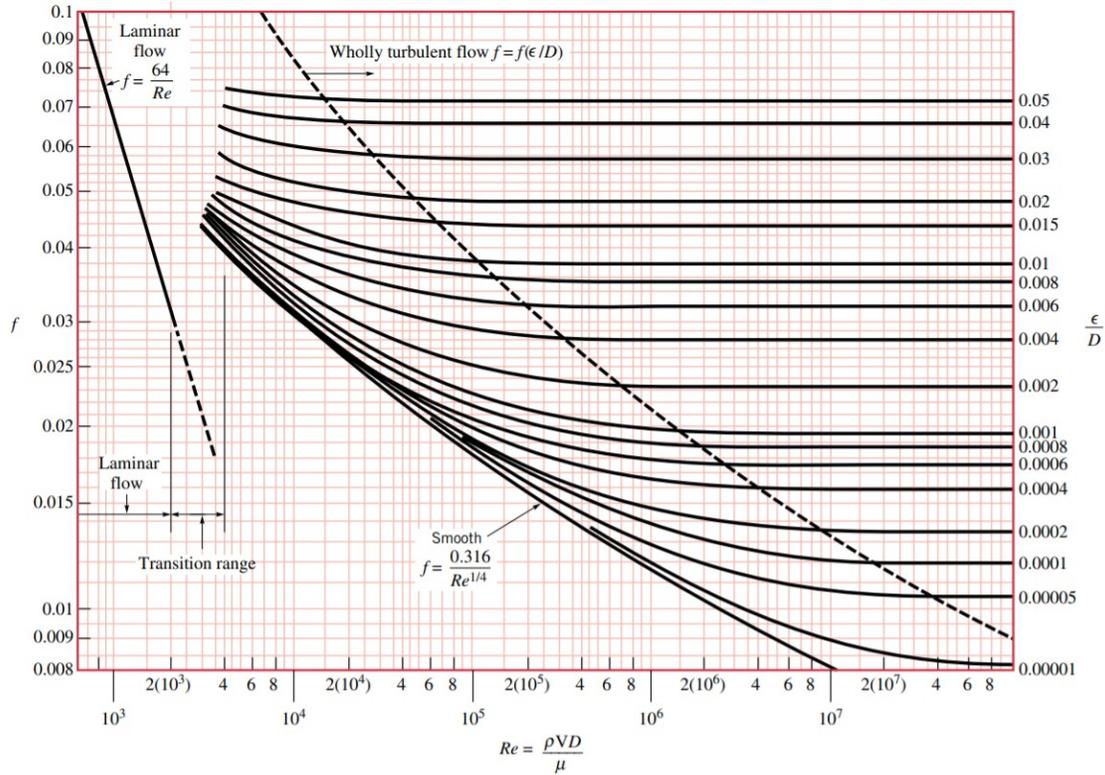


Figure 51: Diagrama de Moody. Fonte: Slide professor Pacífico

$$f_0 = -0,25 \cdot \left[\log_{10} \left(\frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right] \quad (119)$$

Caso o tubo seja hidraulicamente liso, assumir que a rugosidade é 0.

Hidraulicamente liso: a rugosidade é menor que a camada limite

Hidraulicamente rugoso: a rugosidade é maior do que a camada limite

9.5.1 Lei de Hagen-Poiseuille

É uma lei de relaciona a queda de pressão em um conduto com a vazão e as propriedades geométricas. Sua formulação é dada por:

$$\Delta P = \frac{8\mu LQ}{\pi r^4} \quad (120)$$

9.5.2 Tensão de Reynolds:

É o produto da massa específica pela flutuação da velocidade em x e y (ou x e z, etc.). Ele fornece uma medida dos esforços que uma partícula dentro do escoamento sofre devido à turbulência. No coração, por exemplo, essa tensão é muito baixa. Se assim não fosse, as hemácias rasgariam.

É uma função geral do fenômeno físico do escoamento **viscoso** em condutos. Ao longo do contudo, assume-se que apenas a energia de pressão sofre um decréscimo, ou seja, há uma queda de pressão ao

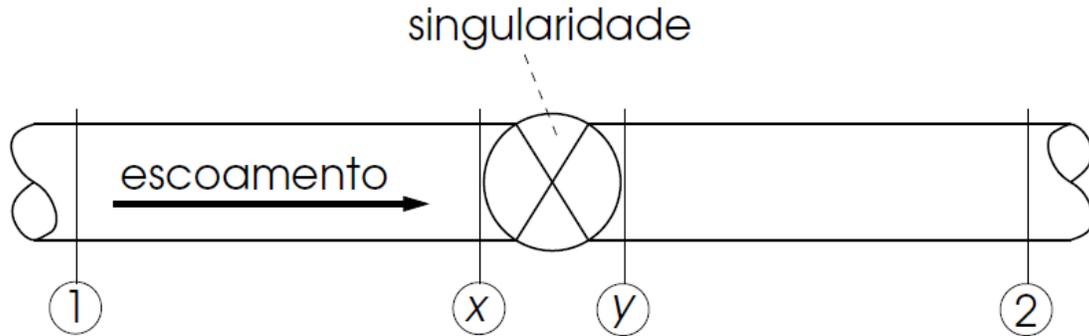


Figure 52: Ilustração da instalação para obter o coeficiente de perda de carga singular. Fonte: Slide do professor Pacífico

longo do escoamento. O deficit da quantidade de movimento dentro de um fluido não se dá apenas na parede, mas também dentro do fluido - o que origina o gradiente de velocidades.

9.6 Perda de carga localizada

A perda de carga localizada é a perda que ocorre pontualmente no escoamento devido à presença de alguma característica que altera o escoamento, por exemplo, válvulas, tês, mudanças de diâmetro, etc. Geralmente é calculada experimentalmente medindo a perda de carga entre dois pontos próximos à singularidade, como mostrado na figura 52.

O equacionamento da perda de carga localizada é dado pela seguinte expressão:

$$h_s = \Delta H_{12} - h_{d,12} \quad (121)$$

Em que h_d é a perda de carga distribuída. Uma vez medida, o h_s é reescrito em função da pressão dinâmica:

$$h_s = K_s \frac{\bar{V}^2}{2g} \quad (122)$$

Caso a singularidade seja uma redução ou aumento de diâmetro, deve ser utilizada a maior velocidade. Os maiores consumidores de energia do escoamento são as zonas de recirculação, sendo um dos maiores fatores da perda de carga singular. Cantos vivos são exemplos de grandes fontes de recirculação.

9.6.1 Comprimento equivalente

Representa o comprimento de perda de carga distribuída que equivale à perda de carga da singularidade. Lembrar que a saída de reservatórios também são perdas de carga singulares. Na falta de informação, adotar $K_{saida} = 0.5$.

Em tubulações, recomenda-se que a velocidade não ultrapasse 3m/s pois a perda de carga depende do quadrado da velocidade.

9.7 Perda de carga total

É a soma da perda de carga distribuída com a perda de carga localizada. Sua formulação é dada por:

$$h_L = \sum_{i=0}^N h_{d,i} + \sum_{j=0}^M h_{s,j} \quad (123)$$

9.8 Equação de energia em um conduto com perda de carga

Assume-se n trechos, localizado em m pontos

$$H_1 - \left(\sum_{i=1}^n h_f + \sum_{j=1}^m h_s \right) + -H_m = H_2 \quad (124)$$

9.9 Linhas de pressão

A linha de pressões (LP) representa a energia de pressão do fluido, pois a velocidade na parede é 0, ou seja, é uma representação geométrica da pressão estática. Já a linha de Energia (LE) representa o lugar geométrico da energia total do sistema, que leva em consideração a energia de pressão mais a energia cinética, ou seja, a pressão de estagnação.

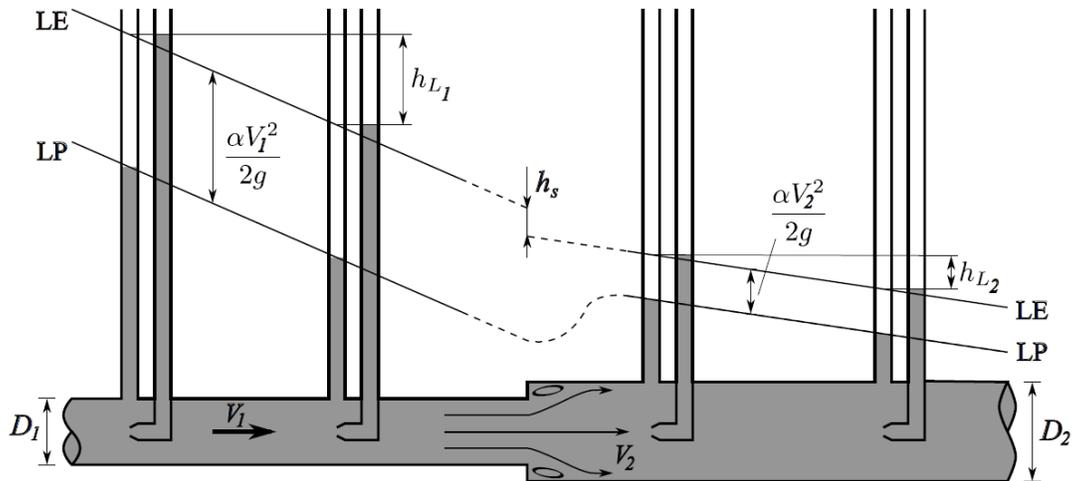


FIGURA 8 – Linha piezométrica (LP) e linha de energia (LE), com as perdas distribuídas e localizadas indicadas.

Figure 53: Linhas de pressão e energia em um conduto. Fonte: Slides professor Sadalla Domingos

Generalizações

A equação da variação da energia de pressão também se aplica nas equações de energias de posição e cinética, ou seja, as energias podem se transmutar entre si mutuamente. Isto pode ser representado pela equação de Bernoulli simplificada para o regime laminar, onde H é a energia por unidade de peso

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} V^2 \quad (125)$$

Onde α é um coeficiente de correção. Em regime laminar é em torno de 2 e, em regime turbulento, tende a 1. E a variação desta entre duas seções de escoamento é dada por:

$$\Delta H = H_1 - H_2 = h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (126)$$

9.10 Camada limite

É a camada onde há uma variação no gradiente de velocidades. Em outras palavras, é a distância que o fluido leva para igualar a velocidade na parede do objeto à velocidade ao longe. Nesta camada, pode existir um ponto de separação da camada limite - este é o ponto em que a derivada da separação das velocidades é 0, ou seja, passa a ocorrer recirculação do fluido. Essa região possui vórtices, conhecidos como vórtices de Von Kármán, também chamando o escoamento de escoamento pulsante - gera vibrações que podem romper a peça, como efeito de *flutter* - a separação da camada limite que causa as vibrações.

A tensão de cisalhamento é máxima na parede e mínima no centro do conduto.

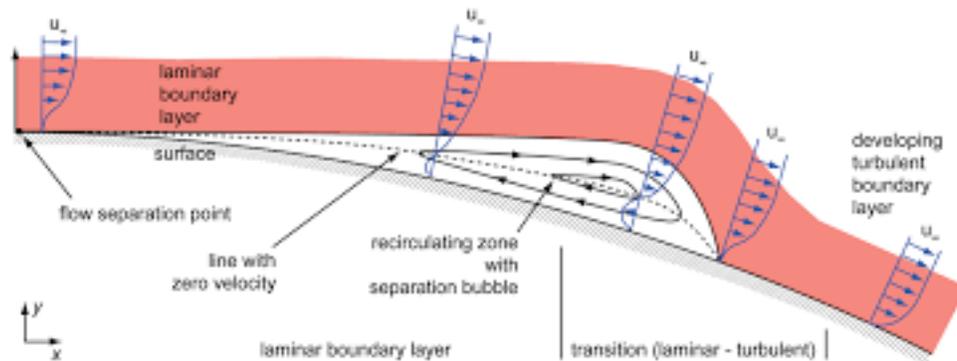


Figure 54: Imagem ilustrativa de separação da camada limite



Figure 55: Formação de vórtices atrás de um aerofólio

9.11 Exercícios

Em mec flu 1, são assumidas as seguintes hipóteses para os exercícios:

- escoamento isotérmico
- fluido incompressível
- regime permanente (em média, sempre haverá flutuações na velocidade)
- escoamento em tubos; seção circular
- rugosidade uniforme
- escoamento com área de seção transversal constante

Elas que permitem a simplificação do problema para que seja possível resolvê-lo com a teoria visto, toda via, elas são válidas para a maior parte dos problemas na vida real. Equações típicas utilizadas são:

1. Perda de carga distribuída
2. Cálculo do f por Weisbach ou Colebrook
3. Reynolds
4. Equação da continuidade

9.12 Equação de Churchill

É uma alternativa à equação de Colebrook para o cálculo do f . Sua formulação é dada por:

$$A = \left\{ -2,457 \cdot \ln \left[\left(\frac{7}{\text{Re}} \right)^{9/10} + 0,27 \cdot \frac{\varepsilon}{D} \right] \right\}^{16} \quad (127)$$

$$B = \left(\frac{37530}{Re} \right)^{16} \quad (128)$$

$$f = 8 \cdot \left[\left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(A+B)^{3/2}} \right]^{1/12} \quad (129)$$

Recomenda-se o uso desta formulação ao invés da de Colebrook para a implementação em rotinas computadorizadas.

10 Bombas e Turbinas

São elementos que adicionam ou removem energia de um fluido. De modo geral, bombas são responsáveis pelo fornecimento e turbinas pela retirada de energia do sistema. Elas podem ser classificadas como turbomáquinas centrífugas (ou radiais), de fluxo misto ou axiais.

10.1 Máquinas de deslocamento positivo

A transferência de energia é feita por variações no volume decorrentes do movimento da parede/fronteira que contém o fluido. Por exemplo, uma bomba de encher pneu, o coração ou bombas de engrenagens.

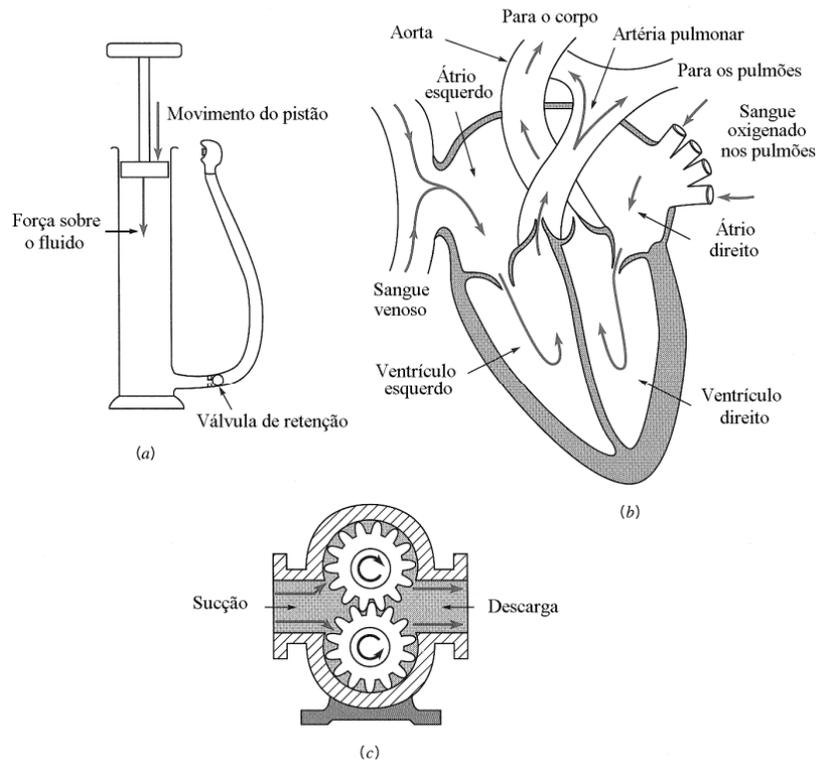


Figure 56: Exemplos de máquinas de deslocamento positivo. Fonte: Munson et al. 2005

10.2 Turbomáquinas dinâmicas

São máquinas adicionadas ao sistema que se caracterizam por realizar trabalho sobre ou retirar energia do fluido. A transferência de energia é realizada por um elemento rotativo, denominado rotor.

Uma turbobomba típica é mostrada na figura 57 e consiste em duas partes principais: um rotor ou impelidor, que impõe um movimento giratório ao líquido, e um tubo coletor, ou carcaça, que direciona o líquido para a região do impelidor e transporta-o para fora sob uma pressão mais alta. A parte da carcaça que circunda o impelidor é chamada de caracol ou voluta e a área de sua seção transversal aumenta gradualmente à medida que se aproxima da saída da máquina. O rotor contém uma série de pás arranjadas de um modo regular em torno do eixo e pode ser fechado (envolto) ou aberto. As pás do rotor podem ser quase retas, ou encurvadas para tornarem-se não radiais na saída. Trecho extraído e adaptado de Mecânica dos Fluidos I - PME3230 2020.

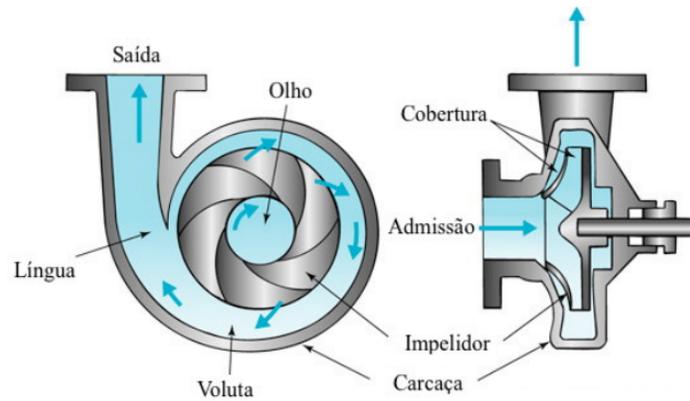


Figure 57: Vistas em corte de uma bomba centrífuga. Fonte: Mecânica dos Fluidos I - PME3230 2020, por sua vez, extraído e adaptado de Potter and Wiggert 2010

10.2.1 Centrífugas

O fluido descreve uma trajetória majoritariamente radial. As pás do rotor costumam ser curvadas para trás e o rotor é relativamente estreito

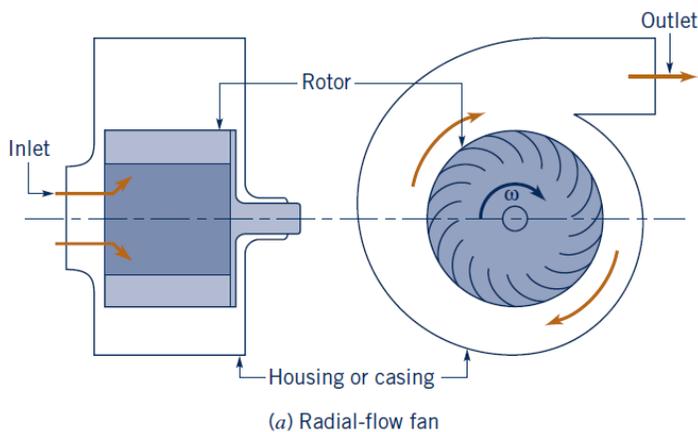


Figure 58: Turbomáquina de fluxo radial. Fonte: Munson et. al.

10.2.2 Fluxo misto

O fluido entra também axialmente, mas descreve uma trajetória "em ângulo" até a saída da bomba. Este tipo de bomba gera um menor aumento de pressão comparada às radiais.

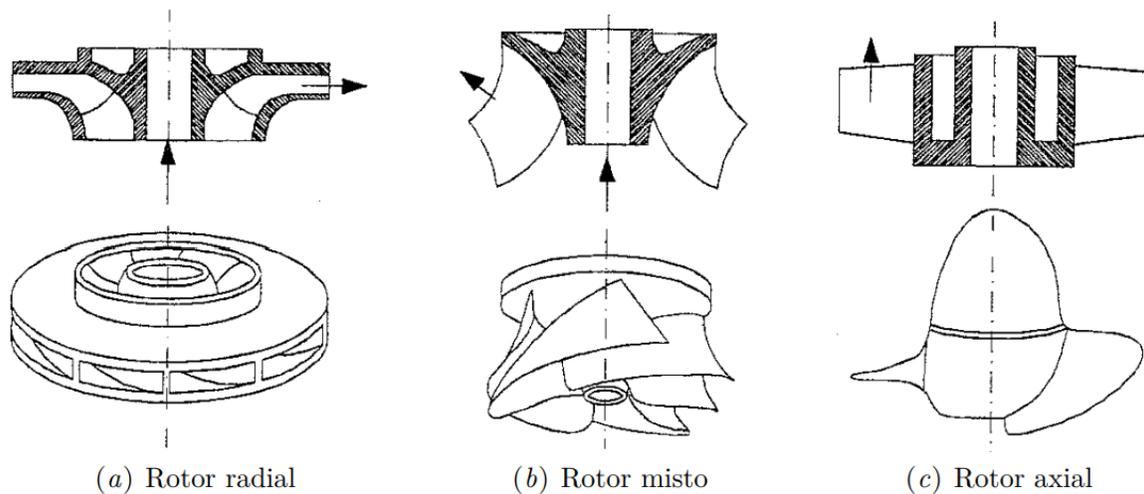


Figure 59: Diferentes tipos de rotores de turbobombas. Fonte: Mecânica dos Fluidos I - PME3230 2020

10.2.3 Axial

O fluido descreve uma trajetória reta entra a entrada e a saída da bomba, gerando, em geral, um pequeno aumento de pressão no fluido.

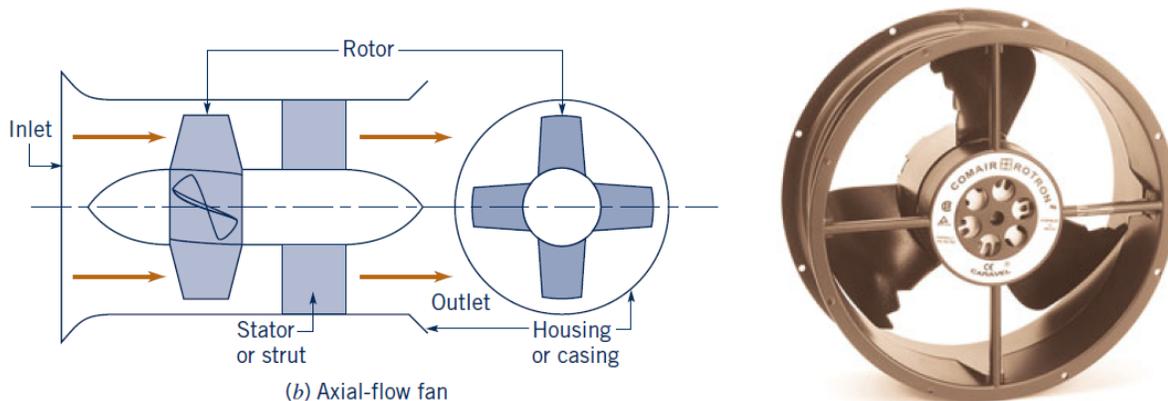


Figure 60: Turbomáquina de fluxo axial. Fonte: Munson et. al.

10.3 Bombas axiais dutadas

Localizam-se dentro dos dutos; as bombas são acopladas diretamente ao motor

Tubo - axial: Forma um vórtice à jusante

Impelidor axial contra-rotativo: Uma pá gira para cada sentido, removendo o vórtice. Vêm dos primeiros projetos de torpedo

Impelidor com pás guias axiais: O vórtice também foi removido

10.4 Análise dimensional e similaridade

Esta subseção foi extraída e adaptada de Mecânica dos Fluidos I - PME3230 2020.

O desenvolvimento de bombas é uma área que faz bom uso da análise dimensional, permitindo que fabricantes atendam um maior número de casos com determinados projetos de bombas. Assumindo escoamento incompressível, as principais grandezas que atuam no fenômeno são:

- ρ : massa específica do fluido
- μ : viscosidade dinâmica do fluido
- D : diâmetro do rotor da bomba
- N : rotação do rotor
- Q : vazão em volume
- E : energia por unidade de massa fornecida ao fluido ($E = gh_r$)
- \dot{W}_m : potência consumida pela bomba

Deste modo, a função representativa do fenômeno pode ser escrita como:

$$f(\rho, \mu, D, N, Q, E, \dot{W}_m) = 0 \quad (130)$$

Segue que a por meio do Teorema de Buckingham-II a função pode ser simplificada em:

$$\left(\frac{gh_r}{N^2 D^2}, \frac{Q}{ND^3}, \frac{\dot{W}_m}{\rho N^3 D^5}, \frac{\rho N D^2}{\mu} \right) = 0 \quad (131)$$

Em que os coeficientes representam:

- Π_1 : Coeficiente de Carga ou manométrico: $C_H = \frac{gH}{N^2D^2}$
- Π_2 : Coeficiente de Vazão: $C_Q = \frac{Q}{ND^3}$
- Π_3 : Coeficiente de Potência: $C_W = \frac{W_{bhp}}{\rho N^3 D^5}$
- Π_4 : Número de Reynolds: $Re = \frac{\rho ND^2}{\mu}$

10.4.1 Eficiência

O método mais comum de se determinar o ganho energético que uma bomba fornece, ou o aumento real de carga h_r é comparando a energia do fluido logo antes e logo depois dela - análogo à determinação do coeficiente de perda de carga singular.

$$h_r = h_e - h_L = \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha \bar{V}^2}{2g} + z \right)_2 - \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha \bar{V}^2}{2g} + z \right)_1 \quad (132)$$

Em que h_e é a carga de trabalho de eixo e h_L a perda de carga na bomba. Conforme já mostrado pela equação da primeira lei da termodinâmica 53, a potência transferida à um fluido é dada por:

$$\dot{W}_f = \gamma Q h_r \quad (133)$$

Deste modo, é possível definir sua eficiência como:

$$\eta = \frac{\dot{W}_f}{\dot{W}_m} = \frac{\gamma Q h_r}{\omega T} \quad (134)$$

Em que T é torque no eixo. Note que este resultado é uma combinação de três adimensionais, constituindo o adimensional Π'_3 :

$$\Pi'_3 = \frac{C_W}{C_H C_Q} = \frac{\gamma Q H}{W_{bhp}} = \eta \quad (135)$$

A figura 61 mostra como alguns dos parâmetros de uma bomba se relacionam. Em um projeto, sempre busca-se o maior rendimento possível, costumando operar próximo ao pico de eficiência. As lâminas da máquina são desenvolvidas para ter máxima eficiência na vazão desejada no projeto.

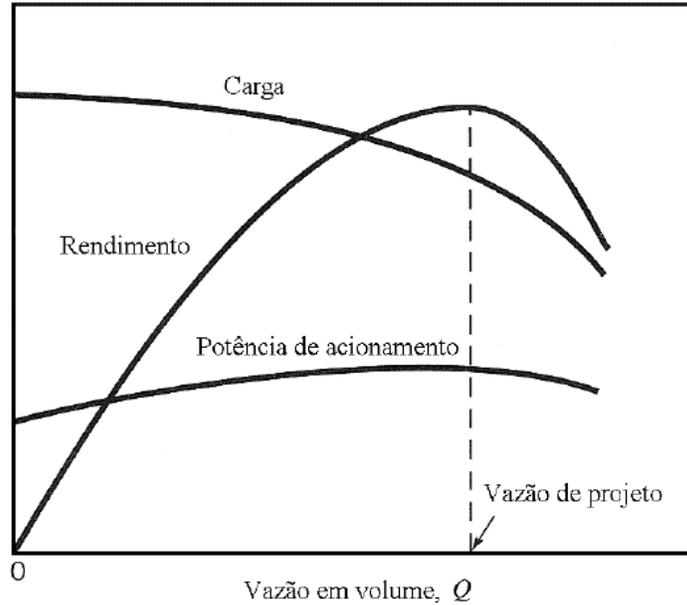


Figure 61: Coeficiente de uma bomba e ponto de maior eficiência; Fonte: Mecânica dos Fluidos I - PME3230 2020, por sua vez, extraído e adaptado de Munson et al. (2004).

Shutoff: Carga desenvolvida por uma bomba com vazão nula. Nesta condição, toda potência fornecida pela bomba é dissipada em calor. Esta condição representa o aumento da carga de pressão que a bomba é capaz de fornecer com a válvula totalmente fechada.

10.4.2 NPSH - Net Positive Suction Head

NPSH é um adimensional que representa o modo como a bomba está posicionada em relação à carga disponível naquele local. Sua formulação é dada por:

$$C_{NPSH} = \frac{g(NPSH)}{N^2 D^2} \quad (136)$$

Para análise, costuma ser utilizado apenas o NPSH "puro". Ele representa a carga que realmente ocorre no sistema considerado. Sendo o índice s referente à sucção da bomba e p_v a pressão de vapor do líquido, calcula-se o $NPSH_D$ Disponível (na entrada)

$$NPSH_D = \frac{p_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} - \frac{p_v}{\gamma} \quad (137)$$

Neste caso, todos os valores de pressão devem ser absolutos. Este valor é comparado com o $NPSH_R$ Requerido, o qual é levantado experimentalmente pelo fabricante. Este valor varia com a vazão e, para que não ocorra cavitação na bomba, deve-se respeitar a condição:

$$NPSH_D \geq NPSH_R$$

10.4.3 Rotação ou velocidade específica

Ela costuma ser medida na vazão de máxima eficiência, dependendo do coeficiente de vazão. Este adimensional dá uma razão entre a vazão e a carga fornecida pela bomba, de modo que um N_S alto indica uma alta vazão (Q) e uma baixa carga (h_s), e um N_S baixo indica uma baixa vazão (Q) e uma alta carga (h_s).

$$N_S = \frac{(Q/ND^3)^{\frac{1}{2}}}{(gH/N^2D^2)^{\frac{3}{4}}} = \frac{N\sqrt{Q}}{(gH)^{\frac{3}{4}}} \quad (138)$$

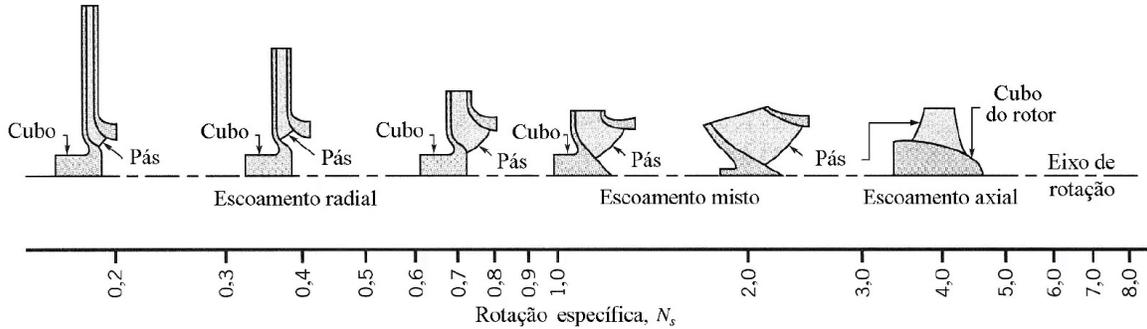


Figure 62: Máquinas típicas para cada rotação específica. Fonte: Slides do Professor Bruno Carmo

10.4.4 Comentários

As bombas costumam operar em números de Mach baixos - ou seja, escoamento incompressível - e números de Reynolds elevados - ou seja, escoamento turbulento completamente desenvolvido. Os altos valores de Re fazem com que variações em seu valor tenham pouco influência nos demais adimensionais, de modo que o estudo de uma bomba volta-se aos outros 3: C_Q , C_H e η . Note que foi utilizado η ao invés de C_W . Isto deve-se ao fato de ser mais interessante estudar a eficiência uma vez que esta já leva em consideração as perdas na bomba, diferente do coeficiente de potência que considera apenas a potência "bruta".

Os adimensionais costumam ser estudados em curvas de desempenho, como na figura 63. Note a correspondência entre os resultados, foi escolhido para o projeto o ponto de eficiência máxima em função da vazão, estando em um ponto de decréscimo no coeficiente de carga e elevação no coeficiente de potência.

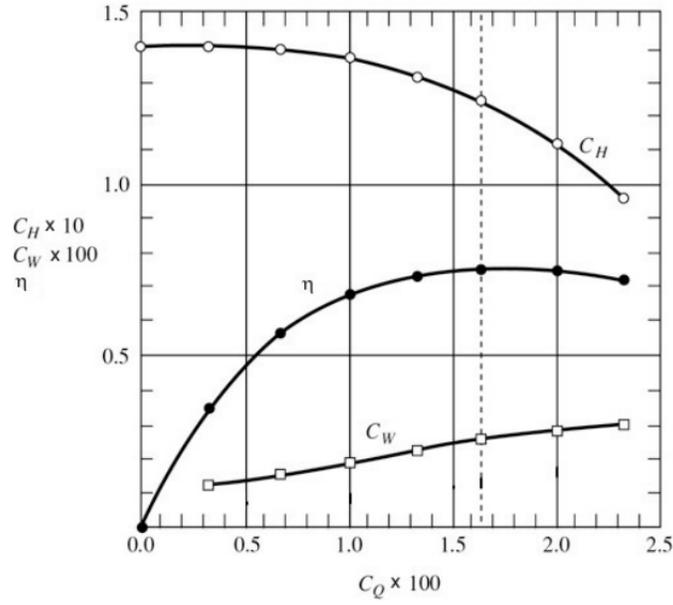


Figure 63: Curvas representativas de bomba de fluxo radial. Fonte: Mecânica dos Fluidos I - PME3230 2020, por sua vez, extraído e adaptado de Potter and Wiggert 2010

SSSSSSSSSS

References

- Mecânica dos Fluidos I - PME3230 (2020). *Roteiro de experiência de laboratório: Estudo das bombas: aplicação da análise dimensional e da teoria da semelhança.*
- Munson, Bruce Roy et al. (2005). *Uma introdução concisa à mecânica dos fluidos.* Edgard Blucher.
- Potter, M.C. and D.C. Wiggert (2010). *Mecânica dos Fluidos.* M. C., Wiggert, D. C. 2010. Mecânica dos Fluidos. 1a ed.

Formulário

Propriedades dos Fluidos

Lei de Newton da Viscosidade

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Conservação de vazão

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

Manometria

Lei de Stevin

$$p + \gamma = cte$$

Altura de uma coluna de água em função da diferença de pressão

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

Cinemática

Equação das linhas de corrente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

Equações das linhas de trajetória

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, x, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, x, t)$$

$$\frac{dz}{dt} = w(x, y, x, t)$$

Propriedades levando em conta a parcela convectiva

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{G}$$

Dinâmica

Equação de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = Cte \left[\frac{J}{kg} \right]$$

Volumes de controle finitos

Número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D_h}{\mu} = \frac{\bar{V} D_h}{\nu} = \frac{4Q}{\pi \cdot D \cdot \nu} = \frac{4 \cdot \dot{m}}{\pi \cdot D \cdot \mu}$$

Primeira Lei da Termodinâmica

$$H_e - H_s = \frac{\dot{W}_a}{\gamma Q} - \frac{\dot{W}_m}{\gamma Q} = h_L - h_m$$
$$H = \left(\frac{\alpha_e V_e^2}{2g} + z_e + \frac{p_e}{\gamma} \right)$$

Perda de carga total

$$h_L = \sum_{i=0}^N h_{d,i} + \sum_{j=0}^M h_{s,j}$$

Perda de carga singular

$$h_s = K_s \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

Perda de carga distribuída (Darcy-Weisbach)

$$h_l = \frac{\Delta p}{\gamma} = f \frac{L}{D_h} \frac{V^2}{2g}$$

Equação de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3,7 D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right)$$

Equação da Continuidade na forma geral (em regime permanente, equivale à conservação de vazão)

$$\left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)_{sis} = \frac{\partial m_{VC}}{\partial t} + \sum_{i=0}^{n_e} \dot{m}_i$$

Conservação da Quantidade de Movimento

$$\vec{G} + \vec{R} = \sum (p_e S_e + \beta_e V_e \dot{m}_e) \vec{n}_e + \sum (p_s S_s + \beta_s V_s \dot{m}_s) \vec{n}_s + \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV$$

Navier-Stokes

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V} \right] = \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot p + \mu \cdot \nabla^2 \cdot \vec{V}$$